УДК 518.5+531.2

Член-кореспондент НАН України **В. В. Скопецький,**
П. С. Малачівський

Ермітова інтерполяція сумою полінома й нелінійного виразу

Встановлено необхідні та достатні умови існування ермітової інтерполяції сумою полінома й нелінійного виразу. Вказано функції, що задовольняють ці умови. Запропоновано й обгрунтовано схему обчислення значення параметрів ермітової інтерполяції сумою полінома й експоненти.

Розглянемо задачу інтерполяції неперервно диференційовної на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$ сумою полінома й нелінійного виразу $\varphi(p; x)$ з параметром p

$$V_n(a; x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + A\varphi(p; x), \qquad A \neq 0, \qquad p_1 < p < p_2 \tag{1}$$

на множині різних впорядкованих за зростанням точок x_j $(j = \overline{1, n+1})$ з відтворенням значень похідної в крайніх точках. Така ермітова інтерполяція використовується для опису різних фізичних процесів і наближення деяких спеціальних функцій [1–4], а також для побудови неперервної й гладкої сплайн-інтерполяції функцій і апроксимації розв'язків диференціальних рівнянь [5].

1. Існування ермітової інтерполяції сумою полінома й нелінійного виразу з одним параметром. Нехай у виразі вигляду (1) нелінійна функція $\varphi(p; x)$ має такі властивості:

1) $\varphi(p; x)$ — неперервно диференційована до $(n+1)$-го порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$ $(\varphi(p; x) \in \in C^{n+1}[\alpha, \beta])$;

2) похідні $\varphi^{(i)}(p; x)$, $i = \overline{1, n}$, є строго монотонними функціями від x на відрізку $[\alpha, \beta]$ для будь-яких $p \in (p_1, p_2)$;

3) відношення $(n+1)$-х похідних $\varphi(p; x)$ за x

$$\frac{\varphi^{(n+1)}(p; \chi_2)}{\varphi^{(n+1)}(p; \chi_1)}$$

є строго монотонною функцією від p для $p \in (p_1, p_2)$ та будь-яких різних χ_1, χ_2 $(\chi_1, \chi_2 \in \in [\alpha, \beta])$.

Розглянемо неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$, що справджують нерівності

$$0 < W_1^{(n)} < W^{(n)} < W_2^{(n)}, \tag{2}$$

де

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(f; z_2, z_3, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(f; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})}; \tag{3}$$

$$D_k(U;z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k})=\frac{D_{k-1}(U;z_{j+1},z_{j+2},\ldots,z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1};z_{j+1},z_{j+2},\ldots,z_{j+k})}-$$
$$-\frac{D_{k-1}(U;z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k-1})}{D_{k-1}(s_{k-1};z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k-1})},\qquad k=\overline{3,n+1},\qquad j=\overline{1,n-k+3}; \tag{4}$$

$$D_2(U;z_j,z_{j+1},z_{j+2})=\begin{cases}\dfrac{D_1(U;z_2,z_3)}{D_1(s_1;z_2,z_3)}-U'(z_1), & \text{якщо}\quad j=1;\\[2mm] \dfrac{D_1(U;z_{j+1},z_{j+2})}{D_1(s_1;z_{j+1},z_{j+2})}-\dfrac{D_1(U;z_j,z_{j+1})}{D_1(s_1;z_j,z_{j+1})}, & \text{якщо}\quad 1<j<n+1;\\[2mm] U'(z_{n+3})-\dfrac{D_1(U;z_{n+1},z_{n+2})}{D_1(s_1;z_{n+1},z_{n+2})}, & \text{якщо}\quad j=n+1;\end{cases} \tag{5}$$

$$D_1(U;z_j,z_{j+2})=\begin{cases}U'(z_1), & \text{якщо}\quad j=1;\\ U(z_{j+1})-U(z_j), & \text{якщо}\quad 1<j\leqslant n+1;\\ U'(z_{n+3}), & \text{якщо}\quad j=n+2;\end{cases} \tag{6}$$

$$s_k(x)=x^k,$$
$$W_1^{(n)}=\min(r_1^{(n)},r_2^{(n)});\qquad W_2^{(n)}=\max(r_1^{(n)},r_2^{(n)}); \tag{7}$$
$$r_i^{(n)}=\lim_{p\to p_i}\frac{D_{n+1}(\varphi;z_2,z_3,\ldots,z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi;z_1,z_2,\ldots,z_{n+2})},\qquad i=1,2;$$

$U'(x)$ — похідна функції $U(x)$; z_j $(j=\overline{2,n+2})$ — різні, впорядковані за зростанням числа з відрізка $[\alpha,\beta]$, $z_1=z_2$, а $z_{n+3}=z_{n+2}$.

Умови існування ермітової інтерполяції функції $f(x)$ виразом (1) на множині точок x_j $(j=\overline{1,n+1})$ з відтворенням значень похідної функції в крайніх точках сформулюємо у вигляді такої теореми.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\beta]$, функція $\varphi(p;x)$ задовольняє вимоги 1, 2 і 3, а точки x_j $(j=\overline{1,n+1})$ належать $[\alpha,\beta]$. Тоді необхідною і достатньою умовою існування ермітової інтерполяції функції $f(x)$ сумою многочлена степеня n $(n\geqslant 1)$ й нелінійного виразу* (1) *на множині різних впорядкованих за зростанням точок x_j $(j=\overline{1,n+1})$, яка відтворює значення похідної функції в крайніх точках x_1 та x_{n+1}, є справдження нерівностей* (2), *в яких $z_j=x_{j-1}$ $(j=\overline{2,n+2})$, $z_1=z_2=x_1$, а $z_{n+2}=z_{n+3}=x_{n+1}$.*

Подібні властивості має також й інтерполяція виразом (1), яка відтворює значення похідної функції лише в одній із крайніх точок. Необхідною й достатньою умовою існування ермітової інтерполяції функції $f(x)$ виразом (1) на множині різних впорядкованих за зростанням точок x_j $(j=\overline{1,n+2})$, яка відтворює значення похідної функції в крайній правій точці x_{n+2}, є справдження нерівностей (2), в яких значення $D_k(U;z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k})$, $j=\overline{1,n-k+3}$ для $k=\overline{3,n+1}$ визначаються за формулою (4), а для $k=1$ та 2 — за формулами

$$D_2(U;z_j,z_{j+1},z_{j+2})=\begin{cases}\dfrac{D_1(U;z_{j+1},z_{j+2})}{D_1(s_1;z_{j+1},z_{j+2})}-\dfrac{D_1(U;z_j,z_{j+1})}{D_1(s_1;z_j,z_{j+1})}, & \text{якщо}\quad 1\leqslant j<n+1;\\[2mm] U'(z_{n+3})-\dfrac{D_1(U;z_{n+1},z_{n+2})}{D_1(s_1;z_{n+1},z_{n+2})}, & \text{якщо}\quad j=n+1,\end{cases} \tag{8}$$

$$D_1(U;z_j,z_{j+1}) = \begin{cases} U(z_{j+1}) - U(z_j), & \text{якщо} \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1; \\ U'(z_{n+3}), & \text{якщо} \quad j = n+2, \end{cases} \tag{9}$$

де $U'(x)$ — похідна функції $U(x)$, $z_j = x_j$ $(j = \overline{1, n+2})$, а $z_{n+2} = z_{n+3} = x_{n+1}$.

Необхідною й достатньою умовою існування ермітової інтерполяції функції $f(x)$ виразом (1) на множині різних впорядкованих за зростанням точок x_j $(j = \overline{1, n+2})$, яка відтворює значення похідної функції в крайній лівій точці x_1, є справдження нерівностей (2), в яких значення $D_k(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})$, $j = \overline{1, n-k+3}$ для $k = \overline{3, n+1}$ визначаються за формулою (4), а для $k = 1$ та 2 — за формулами

$$D_2(U;z_j,z_{j+1},z_{j+2}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U;z_2,z_3)}{D_1(s_1;z_2,z_3)} - U'(z_1), & \text{якщо} \quad j = 1; \\ \dfrac{D_1(U;z_{j+1},z_{j+2})}{D_1(s_1;z_{j+1},z_{j+2})} - \dfrac{D_1(U;z_j,z_{j+1})}{D_1(s_1;z_j,z_{j+1})}, & \text{якщо} \quad 1 < j \leqslant n+1; \end{cases} \tag{10}$$

$$D_1(U;z_j,z_{j+1}) = \begin{cases} U'(z_1), & \text{якщо} \quad j = 1; \\ U(z_{j+1}) - U(z_j), & \text{якщо} \quad 1 < j \leqslant n+2, \end{cases} \tag{11}$$

де $U'(x)$ — похідна функції $U(x)$, $z_j = x_{j-1}$ $(j = \overline{2, n+3})$, а $z_1 = z_2 = x_1$.

Вираз (1) задовольняє вимоги *1*, *2* і *3*, зокрема, з такими функціями $\varphi(p;x)$:

1) $\varphi(p;x) = e^{px}$ на всій числовій осі $(-\infty, \infty)$ для $x \in (-\infty, \infty)$ і відмінних від нуля значеннях параметра p $(p \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty))$;

2) $\varphi(p;x) = x^p$ на $[0, \infty)$ і значеннях p, відмінних від j $(p \neq j)$ для $j = \overline{0, n}$;

3) $\varphi(p;x) = \ln(x+p)$ на $[\alpha, \infty)$ для $\alpha > -p$.

Подані приклади функцій $\varphi(p;x)$ задовольняють вимоги *1*, *2* і *3*, тому що всі похідні цих функцій для вказаних обмежень строго монотонні за x, а їхнє відношення строго монотонне за p.

2. Визначення параметрів ермітової інтерполяції сумою полінома й нелінійного виразу (1). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(p;x)$ задовольняють умови теореми 1 на відрізку $[\alpha, \beta]$ і задано значення функції та її похідної в необхідній кількості точок x_i $(i = \overline{1, r})$, де у випадку інтерполяції з відтворенням значення похідної в обох крайніх точках $r = n+1$, а у разі відтворення значення похідної лише в одній із крайніх точок — $r = n+2$. Тоді параметри a_i $(i = \overline{0, n})$ і A ермітової інтерполяції функції $f(x)$ виразом (1) на множині різних впорядкованих за зростанням точок x_i $(i = \overline{1, r})$ з $[\alpha, \beta]$ визначаються за формулами

$$A = \frac{D_{n+1}(f; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})}; \tag{12}$$

$$a_k = \frac{D_k(f; z_1, \ldots, z_{k+1}) - \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} a_i D_k(s_i; z_1, \ldots, z_{k+1}) - A D_k(\varphi; z_1, \ldots, z_{k+1})}{D_k(s_k; z_1, z_2, \ldots, z_{k+1})}, \tag{13}$$

$$k = \overline{1, n};$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(f(z_2) + f(z_3) - \sum_{i=1}^{n} a_i (z_2^i + z_3^i) - A(\varphi(pz_2) + \varphi(pz_3))\right), \tag{14}$$

де значення виразів $D_k(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})$, $j = \overline{1, n-k+3}$ для $k = \overline{3, n+1}$ знаходяться за формулою (4), а для $k = 1, 2$ — залежно від точок відтворення значення похідної функції. Якщо відтворюється значення похідної функції в обох крайніх точках, то вирази $D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2})$ і $D_1(U; z_j, z_{j+1})$ визначаються відповідно за формулами (5) і (6), в яких $z_j = x_{j-1}$ $(j = \overline{2, n+2})$, $z_1 = z_2 = x_1$, а $z_{n+2} = z_{n+3} = x_{n+1}$. У випадку відтворення значення похідної функції в крайній правій точці значення цих виразів обчислюється за формулами (8) і (9), в яких $z_j = x_j$ $(j = \overline{1, n+2})$, а $z_{n+2} = z_{n+3} = x_{n+1}$. Якщо знаходиться інтерполяція з відтворенням значення похідної функції в крайніх лівій точці, то вирази $D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2})$ і $D_1(U; z_j, z_{j+1})$ шукаємо за формулами (10) та (11), в яких $z_j = x_{j-1}$ $(j = \overline{2, n+3})$, а $z_1 = z_2 = x_1$.

Значення параметра p знаходимо як розв'язок рівняння

$$\omega_n(p) = W^{(n)}, \tag{15}$$

де

$$\omega_n(p) = \frac{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})},$$

вираз $W^{(n)}$ визначається за формулою (2), а вирази $D_k(U; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k})$ — з врахуванням точок інтерполювання похідної, особливості якого вказано в описі формул (12)–(14). Способи розв'язування цього рівняння залежать від функції $\varphi(p; x)$.

3. Ермітова інтерполяція сумою полінома й експоненти. Умови існування ермітової інтерполяції сумою полінома й експоненти

$$E_n(a; x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + A e^{px}, \qquad A \neq 0, \qquad p \neq 0 \tag{16}$$

функції $f(x)$ в крайніх точках відрізка встановлює теорема 2.

Теорема 2. *Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha, \beta]$ і точки x_j $(j = \overline{1, n+1})$ належать $[\alpha, \beta]$. Тоді необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ сумою полінома й експоненти* (16) *на множині різних впорядкованих за зростанням точок x_j $(j = \overline{1, n+1})$ з відтворенням значення похідної $f(x)$ в крайніх точках x_1 та x_{n+1} є справдження нерівностей*

$$W^{(n)} > 0, \qquad W^{(n)} \neq W_0^{(n)}, \tag{17}$$

де

$$W_0^{(n)} = \frac{D_{n+1}(s_{n+1}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(s_{n+1}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})}, \tag{18}$$

$\varphi(p; x) = e^{px}$, значення $W^{(n)}$ визначаєтьcя за формулою (3), *значення $D_k(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})$, $j = \overline{1, n-k+3}$ для $k = \overline{3, n+1}$ — за формулою* (4). *Значення $D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2})$ і $D_1(U; z_j, z_{j+1})$, залежно від точок інтерполювання похідної функції, знаходимо:*

а) за формулами (5) *і* (6) *у випадку інтерполювання похідної функції в обох крайніх точках x_1 і x_{n+2};*

б) за формулами (8) *і* (9) *— інтерполювання похідної функції в точці x_{n+2};*

в) за формулами (10) *і* (11) *— інтерполювання похідної функції в точці* x_1.

Умови (17) існування ермітової інтерполяції сумою полінома й експоненти (16) задовольняють, зокрема, функції $f(x)$, неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha, \beta]$ до n-го порядку ($f(x) \in C^n[\alpha, \beta]$), n-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$ за винятком полінома $(n+1)$-го степеня.

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 2 на відрізку $[\alpha, \beta]$, то параметри a_i ($i = \overline{0, n}$) і A ермітової інтерполяції $f(x)$ виразом (16) визначаються за формулами (12)–(14), в яких $\varphi(p; x) = e^{px}$. Значення параметра p знаходимо як розв'язок рівняння (15). Ліва частина цього рівняння для $\varphi(p; x) = e^{px}$ є експоненційною функцією, яка в цьому випадку має такий вигляд:

$$\omega_n(p) = Ke^{p(\zeta_2 - \zeta_1)}, \tag{19}$$

де

$$K = \frac{\tau_3 - \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \qquad \zeta_1 \in (z_1, z_{n+2}), \qquad \zeta_2 \in (z_2, z_{n+3}).$$

Внаслідок експоненційного характеру залежності лівої частини рівняння (15) від p його розв'язок доцільно шукати як корінь рівняння

$$g_n(p) = V^{(n)}, \tag{20}$$

де $g_n(p) = \ln(\omega_n(p))$, $V^{(n)} = \ln(W^{(n)})$. Розв'язок цього рівняння можна обчислити за ітераційним методом Ньютона

$$p_{i+1} = p_i - \frac{g_n(p_i) - V^{(n)}}{g_n'(p_i)}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

де

$$g_n'(p) = \frac{D_{n+1}(\overline{\varphi}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+3})} - \frac{D_{n+1}(\overline{\varphi}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})}; \tag{22}$$

$$\overline{\varphi}(p; z) = ze^{pz}; \qquad \varphi(p, z) = e^{pz};$$

$$p_0 = \operatorname{sign}\bigl(W^{(n)} - W_0^{(n)}\bigr)\frac{(n+1)|V^{(n)}|}{z_{n+3} - z_2}; \tag{23}$$

значення виразу $W^{(n)}$ визначається за формулою (3), виразу $W_0^{(n)}$ — за формулою (18), $D_k(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})$, $j = \overline{1, n-k+3}$ для $k = \overline{3, n+1}$ — за формулою (4), а значення виразів $D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2})$ і $D_1(U; z_j, z_{j+1})$ визначається залежно від точок відтворення значень похідної функції. Якщо відтворюється значення похідної функції в обох крайніх точках, то вирази $D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2})$ і $D_1(U; z_j, z_{j+1})$ шукаємо за формулами (5) і (6). У випадку відтворення значення похідної функції в крайній правій точці вони визначаються за формулами (8) і (9), в крайній лівій точці — за формулами (10) та (11).

Початкове значення наближення p_0 (23) до шуканого кореня рівняння (15) визначено на основі вигляду лівої частини рівняння (19). При такому виборі значення p_0 його знак завжди збігатиметься зі знаком шуканого розв'язку. Збіг знаків необхідний для забезпечення стійкості ітераційного методу (21), оскільки функція $g_n(p)$ має розрив у точці $p = 0$. У такому випадку проміжні значення p_i завжди будуть одного знаку з шуканим розв'язком. Під час розв'язування тестових задач ітераційний процес (21) збігався за три-чотири ітерації.

Таким чином, необхідною та достатньою умовою існування ермітової інтерполяції сумою полінома й нелінійного виразу (1) є справдження нерівностей (2). При виконанні цих умов параметри такої інтерполяції визначаються за формулами (12)–(14). Значення параметра, що входить у вираз нелінійно, знаходиться як розв'язок трансцендентного рівняння (15). У випадку інтерполяції сумою полінома та експоненти (16) для визначення значення показника експоненти можна застосувати метод Ньютона (21).

1. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 352 с.
2. *Meglinu R. J.* Approximation by exponential sums on discrete and continuous domains // J. Approximation Theory. – 1979. – **25**, No 1. – P. 65–88.
3. *Kobayashi Y., Ohkita M., Inoue M.* Fractional power approximations of elliptic integrals and Bessel functions // Math. Comput. Simulation, – 1978. – **20**, No 4. – P. 285–290.
4. *Малачівський П.* Чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром // Фіз.-мат. моделювання та інформац. технології. – 2005. – Вип. 1. – С. 134–145.
5. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ
Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 01.03.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. V. Skopetskyi, P. S. Malachivskyi**

Hermite's interpolation by the sum of a polynomial and a nonlinear expression

We have established the necessary and sufficient conditions of existence of Hermite's interpolation by the sum of a polynomial and a nonlinear expression. Functions, which satisfy these conditions, are indicated. The calculation scheme for interpolation parameters by such a sum is proposed and grounded.