УДК 519.872

І. М. Кузнєцов

Асимптотичний аналіз внеску немонотонних траєкторій у відмову системи обслуговування

(Представлено академіком НАН України І. М. Коваленком)

Досліджується система обслуговування $M/G/m/r$, в якій розподіл часу обслуговування є сумішшю двох експоненціальних розподілів. Одержано необхідну і достатню умову, коли ймовірність відмови системи на інтервалі зайнятості еквівалентна ймовірності монотонної відмови. Отримано також умови, коли основний внесок у відмову системи роблять немонотонні відмови.

Постановка задачі. Асимптотичний аналіз є одним з найбільш поширених підходів, що застосовується у математичній теорії надійності для отримання високоточних оцінок ймовірнісних характеристик високонадійної системи. Перші результати з асимптотичного аналізу дубльованих систем одержано Б. В. Гнєденком [1, 2]. Істотний внесок у розвиток асимптотичних методів аналізу високонадійних систем, поведінка яких може бути описана регенеруючим процесом, зробили О. Д. Соловйов та його учні [3–5]. Більш загальні схеми досліджувались І. М. Коваленком [6, 7], В. В. Анісімовим [8] та багатьма іншими авторами.

У схемі регенеруючого процесу було доведено [3], що час до першої втрати вимоги у системі обслуговування має асимптотично експоненціальний розподіл. Параметр цього розподілу залежить як від середнього часу інтервалу зайнятості, так і від імовірності q відмови системи протягом інтервалу зайнятості (проміжку часу, коли у системі знаходиться хоча б одна вимога). Якщо середній час інтервалу зайнятості у більшості випадків апроксимується середнім часом обслуговування однієї вимоги, то обчислення ймовірності q є досить складною задачею. Оцінці q було присвячено багато робіт (див., наприклад, [9–12]). В основі майже всіх асимптотичних методів оцінки q лежить принцип монотонних відмов, сформульований І. М. Коваленком [13] (див. також [3–5, 7]).

У подальшому втрату вимоги називаємо відмовою системи обслуговування. Монотонною є така відмова, що з початку інтервалу зайнятості і до відмови системи не було закінчено обслуговування жодної з вимог, тобто кількість вимог у системі монотонно зростає. Всі інші траєкторії є немонотонними. Тоді

$$q = q_0 + q_1, \tag{1}$$

де q_0 і q_1 — ймовірності монотонної та немонотонної відмов відповідно. У випадку високонадійної системи типовою є така ситуація: якщо в інтервалі зайнятості відбулася відмова системи, то з ймовірністю, близькою до одиниці, ця відмова є монотонною, тобто $q_1 = o(q_0)$. Істотні зусилля дослідників були зосереджені на отриманні достатніх умов для виконання цього співвідношення. Так, для системи $M/G/m/r$ (пуассонівський вхідний потік інтенсивністю λ, m обслуговуючих пристроїв, r місць для очікування, час обслуговування має функцію розподілу $B_\epsilon(x)$, що залежить від малого параметра $\epsilon > 0$, обслуговування відбувається в порядку надходження вимог, відмова системи — втрата вимоги) О. Д. Соловйов [9] довів, що умова

$$\frac{\alpha_{m+r+1}(\varepsilon)}{\alpha_1^{m+r}(\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{2}$$

є достатньою для виконання співвідношення (1). У цій формулі використано позначення

$$\alpha_k(\varepsilon) = \int\limits_0^\infty x^k dB_\varepsilon(x), \qquad k \geqslant 1.$$

Застосовуючи більш тонкий математичний апарат, І. М. Коваленку [13] вдалося значно понизити моментні умови. Зокрема, була отримана верхня оцінка $\overline{q}_1$ для q_1:

$$q_1 \leqslant \overline{q}_1 = O(\lambda^{r+1}\alpha_1^{m-1}(\varepsilon)\alpha_{r+2}(\varepsilon)). \tag{3}$$

У даному повідомленні досліджується система $M/G/m/r$, в якій розподіл часу обслуговування є сумішшю двох експоненціальних розподілів, тобто

$$B(x) = u(1 - e^{-\mu_1 x}) + v(1 - e^{-\mu_2 x}), \qquad u + v = 1, \qquad \mu_1 > 0, \qquad \mu_2 > 0.$$

Припустимо, що $\mu_1 \to \infty$, $v \to 0$, $\lambda = \mathrm{const}$, $\mu_2 = \mathrm{const}$. Метою нашої роботи є встановлення необхідних та достатніх умов, коли виконується співвідношення (1). Ці умови порівнюються з достатніми умовами О. Д. Соловйова та І. М. Коваленка (співвідношення (2) та (3)). Крім того, наводяться умови, коли основний внесок у відмову системи вносять немонотонні відмови.

Марковський граф переходів. Поведінка системи на інтервалі зайнятості описується двовимірним ланцюгом Маркова, стан якого має вигляд $\nu = (s, k)$, де s — загальна кількість вимог у системі, а k — кількість вимог I типу (тобто з інтенсивністю обслуговування μ_1), що знаходяться на обслуговуванні. При цьому $(0, 0)$ є початковим станом, а всі стани (s, k) з $s > m+r$ є станами відмови. При цьому q_0 — це ймовірність переходу із стану $(0, 0)$ у множину станів відмови по одній з траєкторій з монотонно зростаючою першою компонентою, q_1 — ймовірність відмови за однією з решта траєкторій (природно, без повернення у стан $(0, 0)$). Ймовірності переходу ланцюга Маркова визначаються таким чином (ймовірність переходу з (s, k) у (s_1, k_1) позначаємо $\mathbf{P}\{(s, k) \to (s_1, k_1)\}$):

якщо $s \leqslant m - 1$, то

$$\mathbf{P}\{(s,0) \to (s+1,0)\} = \frac{\lambda v}{\lambda + s\mu_2} = O(v),$$

$$\mathbf{P}\{(s,0) \to (s-1,0)\} = \frac{s\mu_2}{\lambda + s\mu_2} = O(1), \qquad s \geqslant 1,$$

$$\mathbf{P}\{(s,0) \to (s+1,1)\} = \frac{\lambda u}{\lambda + s\mu_2} = O(1),$$

$$\mathbf{P}\{(s,k) \to (s+1,k)\} = \frac{\lambda v}{\lambda + k\mu_1 + (s-k)\mu_2} = O\left(\frac{v}{\mu_1}\right), \qquad 1 \leqslant k \leqslant s,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s+1,k+1)\}=\frac{\lambda u}{\lambda+k\mu_1+(s-k)\mu_2}=O\biggl(\frac{1}{\mu_1}\biggr),\qquad 1\leqslant k\leqslant s,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s-1,k)\}=\frac{(s-k)\mu_2}{\lambda+k\mu_1+(s-k)\mu_2}=O\biggl(\frac{1}{\mu_1}\biggr),\qquad 1\leqslant k\leqslant s,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s-1,k-1)\}=\frac{k\mu_1}{\lambda+k\mu_1+(s-k)\mu_2}=O(1),\qquad 1\leqslant k\leqslant s;$$

якщо $m\leqslant s\leqslant m+r$, то

$$\mathbf{P}\{(s,0)\to(s+1,0)\}=\frac{\lambda}{\lambda+m\mu_2}=O(1),$$

$$\mathbf{P}\{(m,0)\to(m-1,0)\}=\frac{m\mu_2}{\lambda+m\mu_2}=O(1),$$

$$\mathbf{P}\{(m,k)\to(m-1,k-1)\}=\frac{k\mu_1}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O(1),\qquad 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$\mathbf{P}\{(m,k)\to(m-1,k)\}=\frac{(m-k)\mu_2}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O\biggl(\frac{1}{\mu_1}\biggr),\qquad 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$\mathbf{P}\{(s,0)\to(s-1,0)\}=\frac{m\mu_2 v}{\lambda+m\mu_2}=O(v),\qquad s\geqslant m+1,$$

$$\mathbf{P}\{(s,0)\to(s-1,1)\}=\frac{m\mu_2 u}{\lambda+m\mu_2}=O(1),\qquad s\geqslant m+1,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s+1,k)\}=\frac{\lambda}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O\biggl(\frac{1}{\mu_1}\biggr),\qquad 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s-1,k)\}=\frac{k\mu_1 u+(m-k)\mu_2 v}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O(1),\qquad 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s-1,k-1)\}=\frac{k\mu_1 v}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O(v),\qquad 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s-1,k+1)\}=\frac{(m-k)\mu_2 u}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O\biggl(\frac{1}{\mu_1}\biggr),\qquad 1\leqslant k\leqslant m.$$

Оцінка ймовірності монотонної відмови q_0. Наведені співвідношення дозволяють знайти найбільш імовірні монотонні траєкторії відмови системи (у подальшому символ $O^*(\cdot)$ використовується для позначення величин того ж самого порядку).

1. Ймовірність траєкторії $(0,0)\to(1,0)\to\dots\to(m+r+1,0)$ має порядок $O^*(v^m)$.

2. Ймовірність траєкторії $(0,0)\to(1,1)\to\dots\to(m,m)\to(m+1,m)\to\dots\to(m+r+1,m)$ має порядок $O^*(1/\mu_1^{m+r})$.

3. Ймовірність траєкторії $(0,0)\to(1,0)\to\dots\to(k,0)\to(k+1,1)\to\dots\to(m,m-k)\to(m+1,m-k)\to\dots\to(m+r+1,m-k)$ при $k=1,\dots,m-1$ має порядок $O^*(v^k/\mu_1^{m+r-k})$.

Оскільки ймовірності переходів $(s,k)\to(s+1,k)$ при $1\leqslant s\leqslant m-1$, $1\leqslant k\leqslant s$ мають порядок $O^*(v/\mu_1)$, то ймовірності монотонних траєкторій іншого виду мають більш високий порядок порівняно з наведеними вище.

Знайдемо порядок ймовірності q_0 монотонної відмови залежно від співвідношення порядків v і μ_1. Розглянемо два випадки.

A. Величини v і μ_1 змінюються таким чином, що $v \to 0$, $\mu_1 \to \infty$ та $v^m \mu_1^{m+r} \geqslant c$ для деякого $c > 0$. З цієї умови випливає, що $1/\mu_1^{m+r} \leqslant v^m/c$. Якщо додатково припустити, що $v\mu_1 \leqslant d$ для деякого $d < \infty$, то

$$\frac{v^k}{\mu_1^{m+r-k}} = \frac{(v\mu_1)^k}{\mu_1^{m+r}} \leqslant \frac{d^k}{c} v^m, \qquad k = 1, \ldots, m-1.$$

Тому

$$q_0 = O^*(v^m). \tag{4}$$

Якщо ж припустити, що $v\mu_1 \to \infty$, то найбільш імовірною є траєкторія при $k = m-1$:

$$\frac{v^{m-1}}{\mu_1^{r+1}} = v^m \frac{1}{v\mu_1} \frac{1}{\mu_1^r} = o(v^m).$$

Тому також має місце співвідношення (4).

B. Величини v і μ_1 змінюються таким чином, що $v \to 0$, $\mu_1 \to \infty$ та $v^m \mu_1^{m+r} \to 0$. Тоді $v^m = o(1/\mu_1^{m+r})$. Оскільки $v\mu_1 = (v^m \mu_1^{m+r})^{1/m} (1/\mu_1)^{r/m} \to 0$, то

$$\frac{v^k}{\mu_1^{m+r-k}} = \frac{(v\mu_1)^k}{\mu_1^{m+r}} = o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right), \qquad k = 1, \ldots, m-1.$$

Тому

$$q_0 = O^*\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right). \tag{5}$$

Необхідна та достатня умова. Співвідношення (4) та (5) лежать в основі доведення таких тверджень.

Теорема 1. *Припустимо, що $v \to 0$, $\mu_1 \to \infty$, $\mu_2 = \mathrm{const}$, $\lambda = \mathrm{const}$. Співвідношення $q_1 = o(q_0)$ виконується тоді і тільки тоді, коли v та μ_1 змінюються таким чином, що*

$$v^m \mu_1^{m+r} \to 0. \tag{6}$$

Якщо виконується умова (6), то

$$q_0 = \frac{\lambda^{m+r}}{m! m^r} \frac{1}{\mu_1^{m+r}} + o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right).$$

Теорема 2. *Припустимо, що $v \to 0, \mu_1 \to \infty$, $\mu_2 \to 0$, $\lambda = \mathrm{const}$ та $v^m \mu_1^{m+r} \geqslant c$ для деякого $c > 0$. Тоді $q_0 = o(q_1)$.*

Порівняємо отриману необхідну та достатню умову з достатніми умовами О. Д. Соловйова та І. М. Коваленка. Припустимо, що $q_1 = o(q_0)$. В цьому випадку має місце співвідношення (6). Тому

$$v\mu_1 = (v^m \mu_1^{m+r})^{1/m} \left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{r/m} \to 0. \tag{7}$$

Для розподілу $B(x)$ k-й момент обчислюється за формулою

$$\alpha_k = u\frac{k!}{\mu_1^k} + v\frac{k!}{\mu_2^k}.$$

Тому умова (2) може бути записана у вигляді

$$\frac{\alpha_{m+r+1}}{\alpha_1^{m+r}} = \frac{(m+r+1)!u\mu_2^{m+r+1}}{\mu_1\mu_2(u\mu_2+v\mu_1)^{m+r}} + \frac{(m+r+1)!v\mu_1^{m+r}}{\mu_2(u\mu_2+v\mu_1)^{m+r}} \to 0. \qquad (8)$$

З умови (7) випливає, що перший доданок у правій частині (8) прямує до нуля, коли $\mu_1 \to \infty$. Тому співвідношення (8) виконується тоді і тільки тоді, коли $v\mu_1^{m+r} \to 0$.

Достатня умова (3) має такий вигляд:

$$\frac{\alpha_1^{m-1}\alpha_{r+2}}{q_0} \to 0.$$

Співвідношення $q_1 = o(q_0)$ виконується лише тоді, коли має місце співвідношення (5). Тому

$$\mu_1^{m+r}\alpha_1^{m-1}\alpha_{r+2} = \mu_1^{m+r}\left(u\frac{1}{\mu_1} + v\frac{1}{\mu_2}\right)^{m-1}\left(u\frac{1}{\mu_1^{r+2}} + v\frac{1}{\mu_2^{r+2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_2^{m+r+1}}(u\mu_2+v\mu_1)^{m-1}\left(\frac{u\mu_2^{r+2}}{\mu_1} + v\mu_1^{r+1}\right) \to 0$$

тоді і тільки тоді, коли $v\mu_1^{r+1} \to 0$.

Отримано умови, які можна записати таким чином:

необхідна та достатня умова $(v\mu_1)^m\mu_1^r \to 0$ (теорема 1);

достатня умова О. Д. Соловйова $(v\mu_1)\mu_1^{m+r-1} \to 0$ (співвідношення (2));

достатня умова І. М. Коваленка $(v\mu_1)\mu_1^r \to 0$ (співвідношення (3)).

Очевидно, що умова О. Д. Соловйова є найбільш жорсткою. У випадку однолінійної системи (тобто при $m = 1$) всі три умови збігаються.

1. *Гнеденко Б. В.* О ненагруженном дублировании // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1964. – № 4. – С. 3–12.
2. *Гнеденко Б. В.* О дублировании с восстановлением // Там же. – № 5. – С. 111–118.
3. *Соловьев А. Д.* Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе // Там же. – 1971. – № 6. – С. 79–89.
4. *Гнеденко Д. Б., Соловьев А. Д.* Оценка надежности сложных восстанавливаемых систем // Там же. – 1975. – № 3. – С. 89–96.
5. *Соловьев А. Д., Карасева Н. Г.* Оценка среднего времени жизни восстанавливаемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. – 1998. – № 5. – С. 25–29.
6. *Коваленко И. Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. – Москва: Сов. радио, 1980. – 209 с.
7. *Kovalenko I. N.* Approximation of queues via small-parameter method // Advances in Queueing. – Boca Raton: CRC Press, 1995. – P. 481–506.
8. *Anisimov V. V.* Switching processes in queueing models. – Chichester: Wiley-ISTE, 2008. – 352 p.
9. *Барзилович Е. Ю., Беляев Ю. К., Каштанов В. А. и др.* Вопросы математической теории надежности. – Москва: Радио и связь, 1983. – 376 с.
10. *Константинидис Д. Г.* Принцип монотонной траектории отказа сложной восстанавливаемой системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. – 1990. – № 3. – С. 7–13.

11. *Коваленко И. Н.* Оценка интенсивности потока немонотонных отказов в системе обслуживания $(\leqslant \lambda)/G/m$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 9. – С. 1219–1225.
12. *Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю.* Принцип монотонных отказов и его применение к расчету характеристик надежности структурно сложных систем // Стохастич. модели систем. – Киев: Военная академия ПВО сухопутных войск, 1986. – С. 25–45.
13. *Коваленко И. Н.* Об оценке надежности сложных систем // Вопр. радиоэлектроники. – 1965. – **12**, № 9. – С. 50–68.

Інститут кібернетики
ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ

Надійшло до редакції 16.02.2011

I. N. Kuznetsov

Asymptotic analysis of a contribution of nonmonotone trajectories to the queueing system failure

A queueing system $M/G/m/r$ with the service time distribution being a mixture of two exponential distributions is considered. A necessary and sufficient condition when the system failure in a busy period is equivalent to the probability of a monotone failure is obtained. Conditions when nonmonotone failures give the main contribution to the system failure are also obtained.