Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

10 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

М. О. Гірник

Цілі функції із заданим зростанням їх характеристик

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

Доведено існування цілих функцій як скінченного, так і нескінченного порядку із заданим зростанням їх характеристик. Нові моменти полягають у розгляді асимптотики логарифма модуля цілої функції в інтегральних метриках та застосуванні апроксимаційних теорем.

Застосовуємо стандартні позначення і основні факти теорії потенціалу [1] та теорії розподілу значень мероморфних функцій [2, 3]. Наведемо деякі з них. Позначаємо буквами C з індексами додатні сталі, $\log^+ x := \max(x, 0)$. Для цілої функції позначаємо через

$$M(r,f) := \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}, \qquad T(r,f) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

$$m_q(r, \log|f|) := \|\log|f(re^{i\varphi})|\|_{L^q[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|^q d\varphi\right)^{1/q} \qquad (q \geqslant 1).$$

Порядок $\rho = \rho[V]$ неспадної функції $V\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ означується за формулою

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{\log r}.$$

Як відомо (див. [1, с. 31]), функція $V(r)$, $V(0) = 0$, опукла відносно $\log r$, зображується у вигляді

$$V(r) = \int\limits_0^r \frac{v(t)}{t} dt,$$

де $v(t)$ — неспадна на $[0,\infty)$ функція. У цій роботі доводиться така теорема.

Теорема. *Нехай опукла відносно логарифма неспадна на* $[0,\infty)$ *функція* $V(r)$ *у випадку* $\rho[V]=\infty$ *задовольняє умову*

$$v(r)\leqslant rV(r)\log^{3/2}V(r). \tag{1}$$

Тоді існує ціла функція $f(z)$, *для якої виконуються співвідношення*

$$\log M(r,f)\sim T(r,f)\sim m_q(r,\log|f|)\sim V(r)\sim N(r,a,f)\sim V(r),\quad r\to\infty,\quad a\in\mathbf{C}. \tag{2}$$

Прокоментуємо зміст теореми 1. Дж. Коварі [4] та Дж. Клуні і Т. Коварі [5] для довільної опуклої відносно логарифма неспадної функції $V\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$ побудували приклад цілої функції g з такими властивостями:

$$\log M(r,g)\sim T(r,g)\sim V(r)\sim N(r,a,g)\sim V(r),\qquad r\to\infty,\qquad a\in\mathbf{C}, \tag{3}$$

однак в їх результатах відсутнє співвідношення $m_q(r,\log|f|)\sim V(r)$, $r\to\infty$, яке становить інтерес з огляду на застосування методу рядів Фур'є до мероморфних функцій [6]. О. Бродяк [7] довела існування цілої функції h, для якої $\log M(r,h)\sim T(r,h)\sim V(r)\sim$ $\sim N(r,g)\sim\log m_q(r,|h|)\sim m_2(r,\log|h|)\sim V(r)$, $r\to\infty$, за умови, що для довільного $\varepsilon>0$ існує таке r_0, що при $r>r_0$ виконується

$$v((1+\varepsilon)r)\leqslant\varepsilon\frac{\sqrt{v(r)}V(r)}{\log v(r)}, \tag{4}$$

а $v(r)$ — неперервна і строго зростаюча функція. Зазначимо, що умова (1) простіша за умову (4). Також функція $v(r):=\exp(e^r)$ (тоді має місце $V(r)\sim\exp(e^r-r)/r$, $r\to\infty$, що легко показати за правилом Лопіталя) задовольняє умову (1) і не задовольняє умову (4). Дійсно, запишемо (4) для цієї функції

$$\exp(e^{(1+\varepsilon)r})\leqslant\varepsilon\exp\left(\frac{e^r}{2}\right)\exp(e^r-r)/(r\exp r)=\varepsilon\exp\frac{\left(\frac{3}{2}e^r-2r\right)}{r}.$$

Логарифмуючи, отримуємо нерівність $(e^r)^{1+\varepsilon}\leqslant\frac{3}{2}e^r-2r+\log\varepsilon-\log r$, що неможливо, якщо r достатньо велике число. Далі, з умови (4) при $\varepsilon=1$, з врахуванням нерівності

$$V(r)=\int_1^r\frac{v(t)}{t}dt+\int_0^1\frac{v(t)}{t}dt\leqslant v(r)\log r+C,$$

маємо

$$v(2r)\leqslant\frac{\sqrt{v(r)}v(r)\log r+C}{\log v(r)}.$$

Звідси $\log v(2r)\leqslant\frac{3}{2}\log v(r)+o(\log v(r))$, $r\to\infty$, отже, порядок функції $\log v(r)$ скінченний. Ми встановили, що умова (4) накладає сильні обмеження на зростання функції $V(r)$. Дж. Коварі та Т. Клуні застосували апарат степеневих рядів, О. Бродяк використала канонічні добутки, наша побудова базується на апроксимації субгармонічних функцій.

Доведення теореми 1. Покладемо $u(z) := V(|z|)$. З теореми 2.2 [1] випливає, що $u(z)$ — субгармонічна в $\mathbf{C}$, це твердження легко доводиться і безпосередньо. Розрізнятимемо випадки скінченного і нескінченного порядків. Якщо $\rho[V] < \infty$, то з апроксимаційної теореми Юлмухаметова [8, теорема 5] одержуємо, поклавши в ній $\alpha = \rho+1$, що існують ціла функція $f(z)$, стала $C(\rho)$ та виняткова множина S такі, що

$$|\log|f(z)| - V(|z|)| \leqslant C(\rho)\log|z|, \qquad z \notin S, \tag{5}$$

і (див. [8, зауваження на с. 275 та доведення теорем 4 і 5])

$$\log|f(z)| \leqslant V(|z|) + C(\rho)\log|z|, \qquad z \notin S_1, \tag{6}$$

де

$$S = S_1 \bigcup S_2 \subset \bigcup_j \{z\colon |z - z_j| < r_j\}, \qquad \sum_{|z_j|\geqslant R} r_j = o(R^{-1}), \qquad R \to \infty. \tag{7}$$

Зазначимо (див. [8, с. 278]), що виняткова множина S_1 складається з точок, які не є нормальними відносно міри Ріса субгармонічної функції $V(|z|)$, а виняткова множина S_2 складається з точок, які не є $(|z|^{\alpha}, |z|^{-\alpha})$ нормальними відносно міри Ріса функції $\log|f(z)|$. З радіальної симеричності функції випливає, що для неї множина $S_1 \bigcap\{z\colon |z| = R\}$ порожня, коли $R > R_0$. Дійсно, якщо якась точка кола $\{z\colon |z| = R\}$ не є $(|z|^{\alpha}, |z|^{-\alpha})$ нормальною, то такими є всі точки цього кола, а це суперечить (7). Отже, зі співвідношення (6) випливає

$$\log M(r, f) \leqslant V(r) + o(V(r)), \qquad r \to \infty,$$

а зі співвідношення (5) з урахуванням (7) маємо

$$\log M(r, f) \geqslant V(r) + o(V(r)), \qquad r \to \infty.$$

Таким чином,

$$\log M(r, f) \sim V(r) + o(V(r)), \qquad r \to \infty. \tag{8}$$

Далі, для цієї ж цілої функції $f(z)$ в [9] доведена апроксимація в інтегральній метриці $L_q[0, 2\pi]$

$$\|V(re^{i\varphi}) - \log|f(re^{i\varphi})|\|_{L_q[0,2\pi]} = O(\log r), \qquad r \to \infty,$$

з якої з урахуванням нерівності $|\log^+|x| - \log^+|y|| \leqslant |\log|x| - \log|y||$ та нерівності трикутника для норми $\|\cdot\|_{L_q[0,2\pi]}$ випливає співвідношення

$$T(r, f) \sim m_q(r, \log|f| \sim V(r), \qquad r \to \infty. \tag{9}$$

Тепер оцінимо

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1=\{\varphi: re^{i\varphi}\notin S\}} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_2=\{\varphi: re^{i\varphi}\in S\}} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi, \tag{10}$$

де S — виняткова множина з (7). З (5) випливає, що для достатньо великих значень r виконується нерівність

$$|f(re^{i\varphi}) - a| \geqslant \exp\left(\frac{1}{2}V(r)\right) > 1, \qquad z \notin S,$$

тому

$$\int\limits_{E_1} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi = 0. \tag{11}$$

Для оцінки другого інтеграла в (10) застосуємо теорему Едрея–Фукса [2, теорема 7.3] з $\delta = \mathrm{mes}(\mathrm{E}_2) < \mathrm{r}^{-2}$ і $k = 2$. Тоді одержимо, що

$$\int\limits_{E_2} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi \leqslant \frac{12}{r^2} \log(2\pi e r^2) T(2r, f - a) = o(V(r)), \qquad r \to \infty. \tag{12}$$

З (10)–(12) випливає, що $m(r, a, f) = o(V(r))$, $r \to \infty$, і за першою основною теоремою теорії розподілу значень $N(r, a, f) + m(r, a, f) = T(r, f) + O(1)$, $r \to \infty$, має місце $N(r, a, f) \sim V(r)$, $r \to \infty$, $a \in \mathbf{C}$.

Переходимо до розгляду випадку нескінченного порядку $\rho[V] = \infty$. У цьому випадку застосуємо до $V(|z|)$ апроксимаційну теорему з [10, теорема 2], поклавши в ній $\varepsilon = 1$, і одержимо, що існують ціла функція $f(z)$, стала C і множини $S = S_1 \bigcup S_2$ та $L \subset \mathbf{R}$, $\mathrm{mes}(\mathrm{L}) < \infty$, такі, що

$$\begin{gathered} |\log|f(z)| - V(|z|)| \leqslant C(\log|z| + \log V(|z|)), \qquad z \notin S \subset \bigcup_j \{z\colon |z - z_j| < r_j\}, \\ \log|f(z)| \leqslant V(|z|) + C(\log|z| + \log V(|z|)), \qquad z \notin S_1, \end{gathered} \tag{13}$$

$$\sum_{R \leqslant |z_j| < R + (\log V(R))^{-1}} r_j = o(V(R)^{-1}), \qquad R \to \infty, \qquad R \notin L, \tag{14}$$

Зазначимо, що множина S_1 складається з $(V(|z|)^{1+\varepsilon}, V(|z|)^{-1-\varepsilon})$ нормальних точок відносно міри Ріса функції $V(|z|)$, а множина S_2 — з $(V(|z|)^{1+\varepsilon}, V(|z|)^{-1-\varepsilon})$ нормальних точок відносно міри Ріса функції $\log|f(z)|$. Поява виняткової множини L пов'язана із застосуванням такого варіанта теореми Бореля–Неванлінни [3, с. 120; 11] (у роботі [11] знято умову неперервності функції $V(r)$):

Нехай на $[r_0, \infty)$ *задана неспадна функція* $V(r) \to +\infty$, $r \to \infty$ *і* $\varepsilon > 0$. *Тоді для всіх* $r > r_0$, *крім, можливо, множини* L *скінченної міри, виконується нерівність*

$$V\left(r + \frac{2}{\log V(r)}\right) < V(r)^{1+\varepsilon} \Leftrightarrow \log V\left(r + \frac{2}{\log V(r)}\right) < (1+\varepsilon)\log V(r). \tag{15}$$

Покажемо, що виконання умови (1) гарантує відсутність виняткової множини L в (14). Дійсно, розглянемо різницю

$$\frac{1}{\log V(r)} - \frac{1}{\log V(r + 2/\log V(r))} = -\int\limits_r^{r+2/\log V(r)} (\log^{-1/2} V(t))' dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{r}^{r+2/\log V(r)} \log^{-3/2} V(t) \frac{v(t)/t}{V(t)} dt = \frac{1}{2} \int\limits_{r}^{r+2/\log V(r)} \frac{v(t) \log^{-3/2} V(t)}{tV(t)} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{r}^{r+2/\log V(r)} 1 dt = \frac{1}{\log V(r)}.$$

Звідси випливає нерівність

$$1 - \sqrt{\frac{\log V(r)}{\log V(r + 2/\log V(r))}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\log V(r)}} \leqslant \delta := 1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + 1}}$$

для $r > r_0(\delta)$, а

$$\sqrt{\frac{\log V(r)}{\log V(r + 2/\log V(r))}} \geqslant 1 - \delta \Leftrightarrow \log V\left(r + \frac{2}{\log V(r)}\right) \leqslant \frac{1}{(1-\delta)^2} \log V(r) =$$

$$= (1 + \varepsilon) \log V(r).$$

Тепер такими ж міркуваннями, як при виведенні асимптотики (8) з апроксимаційних оцінок (5)–(7), з оцінок (13) і (14) одержуємо асимптотику

$$\log M(r, f) \sim V(r), \qquad r \to \infty, \tag{16}$$

без винятковоі множини.

Для цієї ж цілої функції $f(z)$ в [9, с. 135] доведено наближення в інтегральній метриці $L^q[0, 2\pi]$

$$\|V(re^{i\varphi}) - \log|f(re^{i\varphi})|\|_{L_q[0,2\pi]} \leqslant$$

$$\leqslant C(1 + \log s(r) + \log r + V(r + 3s(r))\left(\frac{2s(r)}{r} + 1\right)^{1/q}\left(\log \frac{r}{s(r)} + 1\right), \tag{17}$$

де $s(r)$ — додатна незростаюча на $[0, \infty)$ функція. Покладемо $s(r) := V(r)^{-2q}$ в (17), тоді, враховуючи (15), маємо

$$T(r, f) \sim m_q(\log|f|, r) \sim V(r), \qquad r \to \infty.$$

Подібно, замість (12) запишемо ($\delta := r^{-1}V(r)^{-1}, k := (r + \log^{-1} V(r))/r)$):

$$\int\limits_{E_2} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi \leqslant 12 \log(2\pi e r V(r)) \log\left(r + \frac{1}{V(r)}\right) = o(V(r)), \qquad r \to \infty. \tag{18}$$

Тепер з (10), (11) і (18) випливає асимптотика $N(r, a, f) \sim V(r)$, $r \to \infty$, $a \in \mathbf{C}$.

Теорема 1 доведена.

Таким чином, розглянуто новий підхід до доведення існування цілої функції із заданою асимптотикою її характеристик, який базується на апроксимації субгармонічних функцій. У випадку скінченного порядку доведення значно простіше за раніше відомі, а у випадку нескіченного порядку цей підхід підсилює раніше відомий результат О. Бродяк.

1. *Hayman W. K., Kennedy P. B.* Subharmonic functions. Vol. 1. – London; New York; San Francisco: Academic Press, 1976. – 285 p.
2. *Hayman W. K.* Meromorphic functions. – Oxford: Clarendon Press, 1964. – 191 p.
3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – Москва: Наука, 1970. – 592 с.
4. *Clunie J.* On integral functions having prescribed asymptotic growth // Canad. J. Math. – 1965. – **17**, No 3. – P. 396–404.
5. *Clunie J., Kövari T.* On integral functions having prescribed asymptotic growth. II // Ibid. – 1968. – **20**, No 1. – P. 7–20.
6. *Кондратюк А. А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища шк., 1988. – 196 с.
7. *Lyzun O.* Entire functions with prescribed growth // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, No 2. – С. 50–59.
8. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. – 1985. – **11**, № 3. – P. 257–282.
9. *Girnyk M., Goldberg A.* Approximation of subharmonic functions by logarithms of moduli of entire functions in integral metrics // Israel Math. Conf. Proc. – 2001. – **15**. – P. 117–135.
10. *Гирнык М.* Точность приближения субгармонической функции логарифмом модуля аналитической в чебышевской метрике // Зап. науч. семинаров Санкт-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 2005. – **327**. – С. 55–73.
11. *Андрусяк І. В., Філевич П. В.* Мінімальне зростання цілої функції із заданими нулями // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту. Сер. мат. – 2008. – Вип. 421. – С. 13–19.

Львівська комерційна академія
Надійшло до редакції 20.12.2010

M. O. Hirnyk

Entire functions with prescribed growth of their characteristics

We prove the existence of entire functions of finite and infinite orders having a prescribed growth of their characteristics. We consider the asymptotics of the logarithm of the modulus of such entire functions in integral metrics. Our approach consists in the usage of approximation theorems.