УДК 519.56

А. П. Юрачківський

Узагальнення теореми Арцела–Асколі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Нехай (T, d) — повний псевдометричний простір, а X — сепарабельний збіжнісний простір. Говоримо, що послідовність (f_n) у T^X збігається до $f \in T^X$ рівномірно в точці x, якщо співвідношення $f_n(x_n) \to f(x)$ справджується для всякої збіжної до x послідовності (x_n). Показано, що для відносної компактності (f_n) відносно поточково збіжної послідовності необхідною і достатньою є така пара умов: 1) $d(f_n(x_n), f_n(x)) \to 0$ для будь-яких $x \in X$ і збіжної до x послідовності (x_n); 2) існує зліченна послідовнісно щільна множина $X_0 \subset X$ така, що всі послідовності $(f_n(x))$, $x \in X_0$, відносно компактні.

У цьому повідомленні класичну теорему Арцела–Асколі (див., наприклад, [1, 2]) узагальнено в таких напрямах: 1) область визначення відображень — збіжнісний, не обов'язково топологічний, простір; 2) цей простір не обов'язково послідовнісно компактний; 3) відображення не обов'язково послідовнісно неперервні. У такій постановці рівномірна на всьому просторі збіжність перестає бути адекватною, тож розглядаємо слабшу збіжність — поточково рівномірну.

Скрізь нижче (T, d) — псевдометричний простір.

Лема 1. *Нехай t_n^k, t_n $(k, n \in \mathbb{N})$ — деякі точки в T. Припустимо, що*

$$\lim_{k\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} d(t_n^k, t_n) = 0 \tag{1}$$

і при кожному k послідовність $(t_n^k,\ n \in \mathbb{N})$ фундаментальна. Тоді послідовність (t_n) також фундаментальна.

Доведення. Записавши $d(t_n, t_m) \leqslant d(t_n, t_n^k) + d(t_m^k, t_m^k) + d(t_n^k, t_m)$, одержимо з останнього припущення

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} d(t_n, t_m) \leqslant 2 \varlimsup_{n\to\infty} d(t_n, t_n^k),$$

після чого фундаментальність (t_n) випливає з (1).

Лема 2. *Нехай виконано умови леми 1 і, крім того, простір T повний. Тоді:*

1) кожна з послідовностей $(t_n^k,\ n \in \mathbb{N})$ збігається;

2) (t_n) збігається;

3) співвідношення

$$t_n \to t, \qquad t_n^k \to t^k \qquad \text{при} \qquad n \to \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

зумовлюють $t^k \to t$.

Доведення. Перші два твердження випливають із фундаментальності послідовностей $(t_n^k,\ n \in \mathbb{N})$ і, за лемою 1, (t_n) та повноти T.

Співвідношення $t^k \to t$ — простий наслідок (1), (2) і нерівності трикутника.

У подальшому X — довільна (до появи додаткових припущень) непорожня множина. Нехай ι — відображення з X у $2^{X^{\mathbb{N}}} \setminus \{\varnothing\}$ (тобто для кожного $x \in X$ $\iota[x]$ — непорожня множина послідовностей в X). Назвемо множину $Y \subset X$ *ι-замкнутою*, якщо для будь-якого $x \in X$ співвідношення

$$Y^{\mathbb{N}} \bigcap \iota[x] \neq \varnothing \tag{3}$$

зумовлює $x \in Y$.

Лема 3. *Перетин довільної сукупності ι-замкнутих множин — ι-замкнута множина.*

Доведення. Нехай $Y = \bigcap X_\alpha$, де α пробігає деяку множину позначок, а X_α — ι-замкнуті підмножини X. Тоді $Y^{\mathbb{N}} = \bigcap X_\alpha^{\mathbb{N}}$, що дозволяє переписати (3) у вигляді

$$X_\alpha^{\mathbb{N}} \bigcap \iota[x] \neq \varnothing \quad \text{при всіх} \quad \alpha.$$

Звідси за припущенням про X_α маємо $x \in X_\alpha$ при всіх α.

Лема 3 дає змогу означити *ι-замикання* множини $V \subset X$ як найменшу з тих ι-замкнутих підмножин множини X, які містять V. Підмножину, ι-замикання якої співпадає з X, назвемо *ι-щільною.*

Введемо умови:

A1. При кожному $x \in X_0$ послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна.

A2. Для будь-яких $x \in X$ і $(x_k) \in \iota[x]$

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(f_n(x_k), f_n(x)) = 0. \tag{4}$$

Лема 4. *Нехай X_0 — ι-щільна множина в X, а (f_n) — задовольняюча умови* **A1** *і* **A2** *послідовність у T^X. Тоді для будь-якого $x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна.*

Доведення. Позначимо $Y = \{y \in X\colon (f_n(y)) \text{ фундаментальна}\}$. Потрібно показати, що $Y = X$. А це, з огляду на **A1** і ι-щільність X_0, рівносильно ι-замкнутості Y.

Нехай $x \in X$, $(x_k) \in Y^{\mathbb{N}} \bigcap \iota[x]$. Тоді за лемою 1, застосованою до $t_n^k = f_n(x_k)$ і $t_n = f_n(x)$, послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна, тобто $x \in Y$.

Відображення $f\colon X \to T$ називатимемо: *ι-неперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-якої $(x_k) \in \iota[x]$

$$f(x_k) \to f(x); \tag{5}$$

ι-неперервним на X (але “на X” розумітиметься за умовчанням), якщо (5) справджується для всіх $x \in X$ і $(x_k) \in \iota[x]$.

Лема 5. *Нехай X_0 — ι-щільна множина в X, а (f_n) — задовольняюча умови* **A1** *і* **A2** *послідовність у T^X. Припустимо також, що T повний. Тоді (f_n) поточково збігається і будь-яка границя її — ι-неперервне відображення.*

Доведення. Перше твердження випливає з леми 4 і повноти T.

Нехай $x \in X$, $(x_k) \in \iota[x]$, а f — відображення X у T таке, що

$$f_n(x) \to f(x), \qquad f_n(x_k) \to f(x_k) \qquad \text{при} \qquad n \to \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тоді лема 2, застосована до $t_n^k = f_n(x_k)$, $t^k = f(x^k)$, $t_n = f_n(x)$ і $t = f(x)$, стверджує (5).

Пригадаймо, що послідовність у наділеній збіжністю (топологічною, порядковою чи заданою аксіоматично) множині називається *відносно компактною* (в. к.), якщо кожна її підпослідовність містить збіжну підпослідовність.

Лема 6. *Нехай* (f_n) — *задовольняюча умову* **A2** *послідовність у* T^X. *Припустимо також, що існує зліченна* ι-*щільна множина* $X_0 \subset X$ *така, що для будь-якого* $x \in X_0$ *послідовність* $(f_n(x))$ *в. к. Тоді* (f_n) *в. к. відносно поточкової збіжності і кожна часткова границя її* — ι-*неперервне відображення.*

Доведення. Занумеруємо будь-як елементи множини X_0 і позначимо m-й елемент через y_m. Нехай J_0 — довільна нескінченна множина натуральних чисел. За припущенням для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує нескінченна множина $J_{m-1} \subset J_m$ така, що послідовність $(f_n(y_m),\ n \in \in J_m)$ збігається. Позначимо J множину, m-й елемент якої такий же, як у J_m. Тоді для будь-якого $y \in X_0$ послідовність $(f_n(y), n \in J)$ збігається. При цьому за умовою **A2** для всіх $x \in X$ і $(x_k) \in \iota[x]$

$$\lim_{k\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty, n\in J} d(f_n(x_k), f(x)) = 0.$$

Тоді за лемою 5 послідовність $(f_n, n \in J)$ поточково збігається і будь-яка границя її — ι-неперервне відображення.

Назвемо *збіжнісним простором* пару (X, cnvr), де X — непорожня множина, а cnvr — відображення X у $2^{X^{\mathbb{N}}}$ таке, що для кожного $x \in X$ множина $\mathrm{cnvr}[x]$ має властивості:

(i) $(x, x, \ldots) \in \mathrm{cnvr}[x]$;

(ii) якщо $\mathrm{cnvr}[x]$ містить деяку послідовність, то вона містить і всі її підпослідовності;

(iii) якщо $(y_k) \in \mathrm{cnvr}[x]$ і

$$x_n = y_k \qquad \text{при} \qquad n_{k-1} < n \leqslant n_k, \tag{6}$$

де $n_0 = 0$, а (n_k) — строго зростаюча послідовність натуральних чисел, то $(x_n) \in \mathrm{cnvr}[x]$. Останнє співвідношення будемо записувати ще так: $x_n \to x$ (це не виключає, що $x_n \to y \neq x$) і читати "(x_n) збігається x", називаючи при цьому x границею (точніше однією з границь) послідовності (x_n).

У збіжнісних просторах префікс ι- у даних вище означеннях замінюємо словом "послідовнісно". Наприклад, називатимемо відображення $f\colon X \to T$ послідовнісно неперервним у точці x, якщо (5) справджується для будь-якої збіжної до x послідовності (x_k). Читач легко переформулює леми 3–6 у цих термінах.

У подальшому X означає збіжнісний простір. Назвемо послідовність (f_n) у T^X *асимптотично послідовнісно одностайно неперервною* (а. п. о. н.) *у точці* x (відповідно, *на* X, але "на X", як правило, випускатиметься), якщо для будь-якої збіжної до x послідовності (відповідно, для всіх $x \in X$ та $(x_n) \in \mathrm{cnvr}[x]$) справджується співвідношення

$$d(f_n(x_n), f_n(x)) \to 0.$$

Говоримо, що послідовність (f_n) у T^X *збігається до* f *рівномірно в точці* x (відповідно, *поточково рівномірно*), якщо для всякої збіжної до x послідовності (x_n) (відповідно, для всіх $x \in X$ і $(x_n) \in \mathrm{cnvr}[x]$) справджується

$$f_n(x_n) \to f(x). \tag{7}$$

Пригадавши властивість (i) відображення cnvr, виводимо з останнього означення таке.

Лема 7. *Якщо послідовність* (f_n) *у* T^X *збігається до* f *рівномірно в точці* x, *то* $f_n(x) \to f(x)$.

Також безпосередньо з даних вище означень випливає

Лема 8. *Нехай f, f_1, f_2, $\ldots$ — відображення з X у T, а x — точка в X така, що $f_n(x) \to f(x)$. Тоді для того щоб послідовність (f_n) збігалась до f рівномірно в точці x, необхідно і достатньо, щоб (f_n) була а. п. о. н. у цій точці.*

З останніх двох лем маємо

Наслідок 1. *Нехай послідовність (f_n) у T^X в. к. відносно поточково рівномірної збіжності. Тоді вона а. п. о. н. і для кожного $x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ в. к.*

Зауваження 1. Стаціонарна послідовність $(f, f, \ldots)$ не збігається до f рівномірно в тих точках, у яких f не є послідовнісно неперервною. Тому простір T^X, наділений поточково рівномірною збіжністю, не є, взагалі кажучи, збіжнісним. Але вищенаведене означення відносної компактності застосовне і до цієї збіжності.

Лема 9. *Кожна підпослідовність а. п. о. н. (у точці чи на X) послідовності в T^X сама має цю властивість.*

Доведення. Припустимо, що послідовність (f_n) у T^X має не а. п. о. н. у точці x підпослідовність. Це те саме, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(f_n(z_n), f_n(x)) > c$$

для деяких $c > 0$ і $(z_n) \in \mathrm{cnvr}[x]$. Тоді існує строго зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$d(f_{n_k}(y_k), f_{n_k}(x)) > c, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

де $y_k = z_{n_k}$. За вибором (z_n) і властивістю (ii) відображення cnvr послідовність (y_k) також збігається до x. Тоді внаслідок (iii) збігається до x і задана рівністю (6) послідовність (x_n). Переписавши (8) з урахуванням (6) у вигляді

$$d(f_{n_k}(x_{n_k}), f_{n_k}(x)) > c, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

бачимо, що послідовність (f_n) не а. п. о. н. у точці x.

Наслідок 2. *Нехай (f_n) — а. п. о. н. у точці x послідовність у T^X. Тоді рівність* (4) *справджується для всякої збіжної до x послідовності (x_k).*

Доведення. Нехай існують послідовність $(x_k) \in \mathrm{cnvr}[x]$ і додатне число c такі, що

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(f_n(x_k), f_n(x)) > c.$$

Тоді існують нескінченна множина $S \subset \mathbb{N}$ і строго зростаюча послідовність $(n_k, k \in S)$ натуральних чисел такі, що

$$d(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(x)) > c, \qquad k \in S. \tag{10}$$

За властивістю (ii) відображення cnvr послідовність $(x_k, k \in S)$ також збігається до x. Тому (10) означає, що підпослідовність $(f_{n_k}, k \in S)$ послідовності $(f_n, n \in \mathbb{N})$ не а. п. о. н. у точці x.

Поточково рівномірну збіжність називатимемо ще *твердою.*

Наслідок 3. *Будь-яка з границь твердо збіжної послідовності в T^X — послідовнісно неперерервне відображення.*

Доведення. Нехай (f_n) твердо збігається до f. Тоді за лемою 8 вона а. п. о. н. Тепер співвідношення (5) для довільних $x \in X$ і $(x_k) \in \operatorname{cnvr}[x]$ випливає з наслідку 2, леми 7 і очевидної нерівності

$$d(f(x_k), f(x)) \leqslant d(f(x_k), f_n(x_k)) + d(f_n(x_k), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)).$$

Теорема 1. *Нехай T — повний псевдометричний простір, X — збіжнісний простір, X_0 — послідовнісно щільна множина в X, а (f_n) — а. п. о. н. послідовність у T^X така, що для будь-якого $x \in X_0$ послідовність $(f_n(x))$ збігається. Тоді (f_n) твердо збігається.*

Доведення. Послідовність (f_n) має властивості **A1** (за припущенням) і **A2** (за наслідком 2). Тому лема 5 стверджує, що вона поточково збігається на X. За лемою 8 ця збіжність тверда.

Збіжнісний простір, що містить зліченну послідовнісно щільну підмножину, називатимемо *послідовнісно сепарабельним* (або просто сепарабельним, якщо з контексту зрозуміло, що розглядається саме збіжнісний простір). Уведемо умову:

A3. Послідовність $(f_n(x))$ в. к. при всіх x із деякої зліченної послідовнісно щільної множини.

Теорема 2. *Нехай T — повний псевдометричний простір, X — сепарабельний збіжнісний простір, а (f_n) — а. п. о. н. послідовність у T^X, що задовольняє умову* **A3**. *Тоді (f_n) в. к. відносно твердої збіжності.*

Доведення. За наслідком 2 послідовність (f_n) задовольняє умову **A2**. Тому лема 6 стверджує, що вона в. к. відносно поточкової збіжності. Будь-яка поточково збіжна підпослідовність її за лемою 9 а. п. о. н., відтак, за лемою 8, збігається твердо.

Поєднавши теорему 2 з наслідком 1, одержимо

Наслідок 4. *Нехай T — повний псевдометричний простір, X — сепарабельний збіжнісний простір. Тоді для того щоб послідовність (f_n) у T^X була в. к. відносно твердої збіжності, необхідно і достатньо, щоб вона була а. п. о. н. і задовольняла умову* **A3**.

Розглядатимемо топологічний простір як збіжнісний, ототожнюючи за умовчанням $\operatorname{cnvr}[x]$ із множиною топологічно збіжних до x послідовностей. Сім'ю всіх околів точки x у топологічному просторі X позначаємо $\tau(x)$. Відношення $\supset$ робить її напрямленою множиною. Границю довільної напрямленості $F\colon \tau(x) \to \mathbb{R}$ позначаємо $\lim\limits_{U \in \tau(x)} F(U)$. Очевидним є таке твердження.

Лема 10. *Нехай X — топологічний простір, x — точка в ньому, а (f_n) — послідовність у T^X така, що*

$$\lim_{U \in \tau(x)} \varlimsup_{n \to \infty} \sup_{y \in U} d(f_n(y), f_n(x)) = 0. \tag{11}$$

Тоді (f_n) а. п. о. н. в точці x.

Лема 11. *Нехай X — топологічний простір, x — точка в ньому, а (f_n) — задовольняюча умову* (11) *і поточково збіжна до деякого відображення f послідовність у T^X. Тоді f неперервна в точці x.*

Доведення. Записавши

$$\sup_{y \in U} d(f_n(y), f(x)) = \sup_{y \in U} \lim_{n \to \infty} d(f_n(y), f_n(x)) \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \sup_{y \in U} d(f_n(y), f_n(x)),$$

дістанемо з (11) $\lim\limits_{U \in \tau(x)} \sup\limits_{y \in U} d(f(y), f(x)) = 0.$

Лема 10, теорема 2 і лема 11 приводять до такого висновку.

Наслідок 5. *Нехай X — послідовнісно сепарабельний топологічний простір, T — повний псевдометричний простір, а (f_n) — послідовність у T^X, що задовольняє умови* **А3** *і* (11) *(останню — при всіх $x \in X$). Тоді (f_n) в. к. відносно твердої збіжності і кожна її границя — неперервне відображення.*

Лема 12. *Нехай X — топологічний простір, а (f_n) — а. п. о. н. у точці $x \in X$ послідовність у T^X. Припустимо, що $\tau(x)$ має конфінальну послідовність $(U_k, k \in \mathbb{N})$. Тоді справджується рівність* (11).

Доведення. Порушення (11) рівносильне, з огляду на конфінальність (U_k), існуванню додатного числа c такого, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{y\in U_k} d(f_n(y), f_n(x)) > 2c, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

А це означає існування такої послідовності (n_k) натуральних чисел, що

$$\sup_{y\in U_k} d(f_{n_k}(y), f_{n_k}(x)) > 2c, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Узявши таку точку $x_k \in U_k$, що

$$d(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(x)) > \sup_{y\in U_k} d(f_{n_k}(y), f_{n_k}(x)) - c,$$

приходимо до (9). При цьому $x_k \to x$, бо $x_k \in U_k$ і послідовність (U_k) конфінальна у $\tau(x)$. Отже, послідовність (f_{n_k}) не а. п. о. н. у x. Тоді за лемою 9 і (f_n) не має цієї властивості.

Наслідок 6. *Нехай X — топологічний простір із першою аксіомою зліченності, а (f_n) — в. к. відносно твердої збіжності послідовність у T^X. Тоді для будь-якого $x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ в. к. і справджується рівність* (11).

Зауваження 2. Наслідки 5 і 6 узагальнюють теорему Арцела–Асколі в частинах достатності і необхідності відповідно.

Для множини $\mathfrak{F} \subset T^X$ і точки $x \in X$ позначимо $\mathfrak{F}(x) = \{f(x), f \in \mathfrak{F}\}(\subset T)$. Множину $\mathfrak{F} \subset T^X$, де T — топологічний простір, а X — непорожня множина, назвемо *поточково передкомпактною на підмножині* $Y \subset X$ (а при $Y = X$ — просто поточково передкомпактною), якщо всі множини $\mathfrak{F}(x)$, $x \in Y$, передкомпактні. У разі якщо X — топологічний, а T — псевдометричний простір, множину $\mathfrak{F} \subset T^X$ називатимемо *одностайно неперервною в точці* $x \in X$, якщо

$$\lim_{U\in\tau(x)} \sup_{f\in\mathfrak{F}} \sup_{y\in U} d(f(y), f(x)) = 0; \tag{12}$$

одностайно неперервною на X (але “на X” розумітиметься за умовчанням), якщо (12) справджується для всіх $x \in X$. Очевидно, всі елементи одностайно неперервної в точці x множини відображень топологічно неперервні в x. Множину всіх неперервних відображень з X у T позначаємо $\mathrm{C}(X \to T)$. Це збіжнісний простір відносно як поточкової, так і твердої збіжності. Назвемо множину в збіжнісному просторі *послідовнісно компактною* (*послідовнісно передкомпактною*), якщо всяка послідовність її точок містить збіжну до деякої точки цієї множини (відповідно, цього простору) підпослідовність.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір із першою аксіомою зліченності, T — псевдометричний простір, $\mathfrak{F}$ — послідовнісно передкомпактна відносно твердої збіжності* *множина в* $\mathrm{C}(X \to T)$. *Тоді* $\mathfrak{F}$ *поточково предкомпактна і поточково одностайно неперервна.*

Доведення. Візьмемо довільні точку $x \in X$ і послідовність $(f_n) \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$. Остання в. к. відносно твердої збіжності, тож за наслідком 6 послідовність $(f_n(x))$ в. к. А це означає, з огляду на довільність (f_n), що $\mathfrak{F}(x)$ передкомпактна.

Нехай (U_k) — існуюча за першою аксіомою зліченності конфінальна послідовність у $\tau(x)$. Якщо (12) не справджується, то існують додатне число c і послідовність $(f_n) \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$ такі, що

$$\sup_{y \in U} d(f_n(y), f_n(x)) > c \qquad \text{для всіх} \qquad U \in \tau(x), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

З іншого боку, за припущенням про $\mathfrak{F}$ усяка підпослідовність $(f_n, n \in J_0 \subset \mathbb{N})$ містить твердо збіжну підпослідовність $(f_n, n \in J)$. За лемою 12

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty, n \in J}} \sup_{y \in U_k} d(f_n(y), f_n(x)) = 0.$$

Тому існує строго зростаюча послідовність $(n_k) \in J^{\mathbb{N}}$ така, що

$$\sup_{y \in U_k} d(f_{n_k}(y), f_{n_k}(x)) \to 0.$$

А це суперечить (13).

Введемо умову:

A4. $\mathfrak{F}$ поточково передкомпактна на деякій зліченній послідовнісно щільній множині в X.

Теорема 4. *Нехай* X — *послідовнісно сепарабельний топологічний простір,* T — *повний псевдометричний простір, а* $\mathfrak{F}$ — *задовольняюча умову* **A4** *поточково одностайно неперервна множина в* T^X. *Тоді* $\mathfrak{F}$ *послідовнісно передкомпактна відносно твердої збіжності.*

Доведення. За припущенням про $\mathfrak{F}$ будь-яка послідовність $(f_n) \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$ задовольняє умови 11 (при всіх x) і **A3**. Залишається послатись на наслідок 5.

1. *Иосида К.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1989. – 624 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 15.12.2010

A. P. Yurachkivsky

A generalization of the Arzela–Ascoli theorem

Let (T, d) *be a complete pseudometric space and* X *be a sequentially separable space with axiomatically defined convergence. We say that a sequence* (f_n) *in* T^X *converges to* $f \in T^X$ *uniformly at a point* x *if the relation* $f_n(x_n) \to f(x)$ *holds for every sequence* (x_n) *converging to* x. *It is shown that the following pair of conditions is necessary and sufficient for the relative compactness of* (f_n) *with respect to the pointwise uniform convergence: 1)* $d(f_n(x_n), f_n(x)) \to 0$ *for all* $x \in X$ *and sequences* (x_n) *converging to* x*; 2) there exists a countable sequentially dense set* $X_0 \subset X$ *such that all the sequences* $(f_n(x))$, $x \in X_0$, *are relatively compact.*