УДК 517.977

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Чикрий, И. С. Раппопорт**

К теореме об обратном образе для $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримых многозначных отображений

Встановлено $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірність спеціальних багатозначних відображень, які відіграють важливу роль при побудові керувань динамічними об'єктами на основі теорем вимірного вибору та забезпечують суперпозиційну вимірність в ігрових задачах.

В математической теории управления и теории динамических игр [1, 2] при выборе управляющих воздействий часто используются принципы измеримого выбора, восходящие к классической теореме Филиппова о неявных функциях [3]. В игровых задачах в этом смысле ключевую роль играют специальные многозначные отображения [4, 5], обладающие, как показано в данной работе, свойством совокупной $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримости [6], а, следовательно, суперпозиционной $\mathfrak{L}$-измеримости [6, 7]. Последнее обеспечивает аналогичное свойство для селекторов многозначных отображений и дает возможность строить допустимые управления, реализующие гарантированный результат [5]. В работе используется подход, базирующийся на методике, развитой в [7]. Он позволяет обобщить соответствующие результаты из работ [6, 7], касающиеся теоремы об обратном образе.

Для любого замкнутого множества Ω евклидового пространства $\mathbb{R}^k$ обозначим через $\mathfrak{L}$ множество всех его измеримых по Лебегу подмножеств [6] и пусть $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ — σ-алгебра борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^l$. Обозначим через $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ σ-алгебру, порожденную произведением множеств $L \times B$, где $L \in \mathfrak{L}$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$. Множества, принадлежащие этой σ-алгебре, будем называть $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримыми (более точно, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримыми). Аналогично определяются $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$-измеримые множества.

Вектор-функцию $f(\omega, x)$, $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, будем называть $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой, если для любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ его обратный образ $f^{-1}(B) = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l\colon f(\omega, x) \in B\}$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым.

Многозначное отображение $F(\omega, x)$, $F\colon \Omega \times \mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^m}$, будем называть $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым, если для любого открытого множества $A \subset \mathbb{R}^m$ его обратный образ $F^{-1}(A) = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l\colon F(\omega, x) \cap A \neq \varnothing\}$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым. Разумеется, если вместо $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый оставить слова $\mathfrak{L}$-измеримый или $\mathfrak{B}$-измеримый, то определения остаются в силе. Это же касается и всех последующих утверждений в аналогичной ситуации.

Каждому многозначному отображению $F(\omega, x)$, $F\colon \Omega \times \mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^m}$ можно сопоставить его график $\operatorname{gr} F = \{(\omega, x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m\colon z \in F(\omega, x)\}$ и эффективное множество $\operatorname{dom} F = \{(\omega, x) \in \Omega \in \mathbb{R}^l\colon F(\omega, x) \neq \varnothing\}$. Обозначим через $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ σ-алгебру, порожденную множествами $L \times B_1 \times B_2$, где $L \in \mathfrak{L}$, $B_1 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$, $B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$.

Лемма 1. *Пусть для многозначного отображения $F(\omega, x)$, $F\colon \Omega \times \mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^m}$, $\operatorname{gr} F \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда для всякой $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой вектор-функции $f(\omega, x)$, $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, множество*

$$\{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l\colon f(\omega, x) \in F(\omega, x)\} \tag{1}$$

$\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-*измеримо.*

Доказательство. Выберем произвольную $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримую вектор-функцию $f(\omega,x)$, $f\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$ и положим $\varphi(\omega,x)=(\omega,x,f(\omega,x))$. Покажем, что

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon f(\omega,x)\in F(\omega,x)\}=\varphi^{-1}(\operatorname{gr}F). \tag{2}$$

Действительно, имеем

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon f(\omega,x)\in F(\omega,x)\}=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon(\omega,x,f(\omega,x))\in\operatorname{gr}F\}=$$
$$=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon\varphi(\omega,x)\in\mathrm{grF}\}=\varphi^{-1}(\mathrm{gr\,F}).$$

Для каждого $L\times B_1\times B_2\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\varphi^{-1}(L\times B_1\times B_2)=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon\varphi(\omega,x)\in L\times B_1\times B_2\}=$$
$$=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon(\omega,x,f(\omega,x))\in L\times B_1\times B_2\}=$$
$$=(L\times B_1)\bigcap\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon f(\omega,x)\in B_2\}=(L\times B_1)\bigcap f^{-1}(B_2).$$

Здесь $L\times B_1\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$, $f^{-1}(B_2)\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$, так как $f(\omega,x)$, $f\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ — измеримая вектор-функция по предположению.

Поэтому для всех $C\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ $\varphi^{-1}(C)\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$. Таким образом, поскольку $\operatorname{gr}F\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$, то с учетом соотношения (2) множество (1) $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ — измеримо.

Будем называть многозначное отображение $F(\omega,x,y)$, $F\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^m}$, суперпозиционно $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым, если для каждой $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой вектор-функции $f(\omega,x)$, $f\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^n$, многозначное отображение $\Gamma(\omega,x)=F(\omega,x,f(\omega,x))$, $\Gamma\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to\to 2^{\mathbb{R}^m}$, — $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ — измеримо.

Лемма 2. *Если многозначное отображение $F(\omega,x,y)$, $F\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^n}$, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримо, то оно суперпозиционно $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное открытое множество $A\subset\mathbb{R}^m$ и рассмотрим многозначное отображение $H(\omega,x)$, $H\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^n}$, где $H(\omega,x)=\{y\in\mathbb{R}^n\colon F(\omega,x,y)\bigcap A\neq\varnothing\}$. Тогда имеем

$$\operatorname{gr}H=\{(\omega,x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\colon y\in H(\omega,x))\}=$$
$$=\{(\omega,x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\colon F(\omega,x,y)\bigcap A\neq\varnothing\}=F^{-1}(A).$$

Но, по условию, $F^{-1}(A)\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ и поэтому в силу леммы 1 для всякой $\mathfrak{L}\otimes\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой функции $f(\omega,x)$, $f\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^n$, множество

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon F(\omega,x,f(\omega,x))\bigcap A\}=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon f(\omega,x)\in H(\omega,x)\},$$

$\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо, что и требовалось доказать.

Далее, говоря о непрерывности вектор-функций и многозначных отображений, используем общепринятые определения [6].

Здесь вектор-функцию $f(\omega,x,y)\colon f\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, будем называть функцией Каратеодори, если для каждого $y\in\mathbb{R}^n$ $f(\cdot,\cdot,y)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измерима и при каждом $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$ $f(\omega,x,\cdot)$ непрерывна. Аналогично, многозначное отображение $F(\omega,x,y)$, $F\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to\to 2^{\mathbb{R}^m}$, будем называть отображением Каратеодори, если для каждого $y\in\mathbb{R}^n$ $F(\cdot,\cdot,y)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо и при каждом $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$ $F(\omega,x,\cdot)$ непрерывно.

Лемма 3. *Пусть многозначное отображение $F(\omega, x, y)$, $F\colon \Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$ имеет замкнутые значения и является отображением Каратеодори. Тогда отображение $F(\omega,x,y)$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримым.*

Доказательство. При каждом $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$ многозначное отображение $F(\omega,x,\cdot)$ непрерывно и поэтому полунепрерывно сверху. Следовательно, для любого замкнутого множества $C\subset\mathbb{R}^m$ многозначное отображение $\Gamma(\omega,x)$, $\Gamma\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^n}$, где $\Gamma(\omega,x)=\{y\in\mathbb{R}^n\colon F(\omega,x,y)\bigcap C\neq\varnothing\}$, имеет замкнутые значения. Покажем, что для всякого $y\in\mathbb{R}^n$ скалярная функция $\rho(y,\Gamma(\omega,x))=\inf\{\|y-z\|\colon z\in\Gamma(\omega,x)\}$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой.

Положим $\varepsilon>0$ и рассмотрим многозначное отображение $\Gamma_\varepsilon(\omega,x)=\{y\in\mathbb{R}^n\colon F(\omega,x,y)\bigcap C_\varepsilon\neq\varnothing\}$, $\Gamma_\varepsilon\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^n$, где $C_\varepsilon=\{z\in\mathbb{R}^m\colon\rho(z,C)<\varepsilon\}$.

Все множества $\Gamma_\varepsilon(\omega,x)$, $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$, открыты, поскольку многозначное отображение $F(\omega,x,\cdot)$ полунепрерывно снизу. При этом, для каждого $y\in\mathbb{R}^n$ множества

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon y\in\Gamma_\varepsilon(\omega,x)\}=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\colon F(\omega,x,y)\textstyle\bigcap C_\varepsilon\neq\varnothing\}$$

$\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримы. Поэтому в силу предложения 4 [7, с. 340] с учетом теоремы 2 [7, с. 342] функция $\rho(y,\Gamma_\varepsilon(\omega,x))$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измерима при всех $y\in\mathbb{R}^n$.

Если теперь устремить ε к 0, то функция $\rho(y,\Gamma_\varepsilon(\omega,x))$ будет стремиться к функции $\rho(y,\Gamma(\omega,x))$ и, следовательно, при каждом $y\in\mathbb{R}^n$ функция $\rho(y,\Gamma(\omega,x))$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой как предел последовательности $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримых функций.

В силу теоремы "о характеризации" [6, с. 310] $\operatorname{gr}\Gamma\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ и поэтому множество $F^{-1}(C)$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримым, так как

$$F^{-1}(C)=\{(\omega,x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\colon F(\omega,x,y)\textstyle\bigcap C\neq\varnothing\}=$$
$$=\{(\omega,x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\colon y\in H(\omega,x))\}=\operatorname{gr}\Gamma.$$

Обратившись снова к теореме "о характеризации", получим, что отображение $F(\omega,x,y)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримо.

Теорема. *Пусть многозначное отображение $F(\omega,x,y)$, $F\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^m}$ имеет замкнутые значения и является отображением Каратеодори, а многозначные отображения $H(\omega,x)$, $H\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^n}$, $G(\omega,x)$, $G\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^m}$ имеют замкнутые значения и $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ — измеримы. Тогда многозначное отображение $\Phi(\omega,x)$, $\Phi\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^n}$, $\Phi(\omega,x)=\{y\in\mathbb{R}^n\colon y\in H(\omega,x), F(\omega,x,y)\bigcap G(\omega,x)\neq\varnothing\}$ имеет замкнутые значения и $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ — измеримо.*

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $\Psi(\omega,x)$, $\Psi\colon\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^n}$, $\Psi(\omega,x)=\{y\in\mathbb{R}^n\colon F(\omega,x,y)\bigcap G(\omega,x)\neq\varnothing\}$. При каждом $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$ многозначное отображение $F(\omega,x,\cdot)$ полунепрерывно сверху и поэтому для каждого замкнутого множества $C\subset\mathbb{R}^m$ множество $\{y\in\mathbb{R}^n\colon F(\omega,x,y)\bigcap C\neq\varnothing\}$ замкнуто при всех $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$. Это значит, что $\Psi(\omega,x)$ — замкнутозначно и, следовательно, $\Phi(\omega,x)=H(\omega,x)\bigcap\Psi(\omega,x)$ имеет замкнутые значения при каждом $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$, так как $H(\omega,x)$ замкнутозначно по условию. Таким образом, в силу теоремы "о характеризации" для доказательства достаточно проверить, что для всякого $y\in\mathbb{R}^n$ функция $\rho(y,\Phi(\omega,x))$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измерима.

Положим $\varepsilon>0$ и рассмотрим $G_\varepsilon(\omega,x)=\{z\in\mathbb{R}^n\colon\rho(z,G(\omega,x))<\varepsilon\}$ — открытую ε-окрестность образов многозначного отображения $G(\omega,x)$, учтя непрерывность скалярной функции $\rho(z,G(\omega,x))$ по z. С ее помощью введем многозначные отображения $\Psi_\varepsilon(\omega,x)=\{y\in\mathbb{R}^n\colon F(\omega,x,y)\bigcap G_\varepsilon(\omega,x)\neq\varnothing\}$, $\Phi_\varepsilon(\omega,x)=H(\omega,x)\bigcap\Psi_\varepsilon(\omega,x)$.

Заметим, что многозначное отображение $H(\omega, x)$ имеет замкнутые значения и $\mathfrak{L} \otimes \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо, а все множества $\Psi_\varepsilon(\omega, x)$ открыты в силу полунепрерывности снизу многозначного отображения $F(\omega, x, y)$ по y. Следовательно, для того чтобы показать $\mathfrak{L} \otimes \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримость функции $\rho(y, \Phi_\varepsilon(\omega, x))$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$ на основании предположения 5 [7, с. 340] и теоремы 2 [7, с. 342], достаточно проверить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримость множества

$$\{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \colon y(\omega, x) \in \Psi_\varepsilon(\omega, x)\} \tag{3}$$

для каждой $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой вектор-функции $y(\omega, x)$, $y \colon \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$. Имеем

$$\begin{aligned} &\{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \colon y(\omega, x) \in \Psi_\varepsilon(\omega, x)\} = \\ &\qquad = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \colon F(\omega, x, y(\omega, x)) \bigcap G_\varepsilon(\omega, x) \neq \varnothing\} = \\ &\qquad = \operatorname{dom}[F(\omega, x, y(\omega, x)) \bigcap G_\varepsilon(\omega, x)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Многозначное отображение $F(\omega, x, y)$ является отображением Каратеодори и поэтому оно суперпозиционно $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо в силу лемм 2 и 3. Многозначное отображение $G_\varepsilon(\omega, x)$ открытозначно. Покажем, что если $z(\omega, x)$, $z \colon \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, произвольная $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримая вектор-функция, то множество

$$\{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \colon z(\omega, x) \in G_\varepsilon(\omega, x)\} \tag{5}$$

$\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо. Действительно, имеем $\operatorname{gr} G_\varepsilon = \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \colon z \in \in \operatorname{gr} G_\varepsilon(\omega, x)\} = \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \colon \rho(z, G(\omega, x) < \varepsilon\}$. Но скалярная функция $(\omega, x, z) \to \rho(z, G(\omega, x))$ является функцией Каратеодори и в силу леммы 3 $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ — измерима. Поэтому $\operatorname{gr} G_\varepsilon \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ и на основании леммы 1 заключаем, что множество (5) $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо. Поэтому в силу предложений 1 и 5 [7, с. 340] множество $\operatorname{dom}[F(\omega, x, y(\omega, x)) \bigcap G_\varepsilon(\omega, x)]$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо. Тогда из равенства (4) следует, что множество (3) $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо и, следовательно, функция $\rho(y, \Phi_\varepsilon(\omega, x))$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измерима для всех $y \in \mathbb{R}^n$. Но при $\varepsilon \to 0$ $\rho(y, \Phi_\varepsilon(\omega, x)) \to \rho(y, \Phi(\omega, x))$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой как предел последовательности $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримых функций.

1. *Понтрягин Л. С.* Избранные научные труды. Т. 2. – Москва: Наука, 1988. – 576 с.
2. *Chikrii A. A.* Conflict controlled processes. – Boston; London; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 424 p.
3. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., хим. – 1959. – **2**, № 1. – С. 25–32.
4. *Чикрий А. А.* Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. Мат. Ин-та им. В. А. Стеклова. – 2010. – **271**. – С. 76–92.
5. *Чикрий А. А., Раппопорт И. С., Чикрий К. А.* Многозначные отображения и их селекторы в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – № 5. – С. 129–144.
6. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. – Boston; Basel; Berlin: Birhäuser, 1990. – 461 p.
7. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. – Москва: Наука, 1974. – 480 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 30.03.2011

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Chikrii, I. S. Rappoport**

On the inverse image theorem for $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-measurable set-valued maps

The $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-measurability of special set-valued maps, which play an important role in the construction of controls over dynamic objects on the basis of the measurable choice theorems and ensure the superimposed measurability in gaming problems, is established.