Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2011

МЕХАНІКА

УДК 539.3

Ю. П. Глухов

Многослойная предварительно напряженная плита на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки. Плоская задача

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуто постановку і метод розв'язання плоскої усталеної задачі про збурення багатошарової попередньо напруженої плити на жорсткій основі поверхневим навантаженням, що рухається з постійною швидкістю. Як приклад розглянуто двовимірну задачу для попередньо напруженого шару на жорсткій основі. За допомогою методу інтегральних перетворень Фур'є отримано в загальному вигляді фундаментальний розв'язок задачі при різних умовах контакту і швидкостях руху навантаження.

В данной работе изучается динамическая задача для многослойной предварительно напряженной полосы, лежащей на жестком основании и подверженной воздействию поверхностной подвижной нагрузки. В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями различные двумерные модели многослойной среды изучались в работах [1–7].

Многослойная полоса на жестком основании. Рассмотрим подверженную воздействию подвижной нагрузки упругую многослойную плиту, состоящую из N плоскопараллельных упругих слоев толщиной h_s $(s = \overline{1, N})$, лежащую на жестком основании. Слои пронумерованы по порядку $s = \overline{1, N}$ сверху вниз и состоят из сжимаемых или несжимаемых предварительно напряженных изотропных материалов с произвольной формой упругого потенциала. Плита отнесена к декартовой системе координат ξ_i $(i = 1, 2, 3)$, которые вводятся в начальном деформированном состоянии.

Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние плиты является однородным. Пусть нагрузка движется по свободной поверхности верхнего слоя с постоянной скоростью v в течение большого промежутка времени, причем она не зависит от координаты ξ_3, тогда относительно системы координат, связанной с этой нагрузкой, существует установившееся плоское деформированное состояние. Для решения задачи воспользуемся соотношениями линеаризированной теории упругости тел с начальными напряжениями [7].

Предполагая, что картина деформаций инвариантна относительно времени в движущейся вместе с нагрузкой системе координат (y_1, y_2), где $y_1 = \xi_1 - vt$, $y_2 = \xi_2$, уравнение установившегося движения слоев и полупространства через функцию $\chi(y_1, y_2)$ можно записать в виде

$$\left(\eta_1^{\{s\}2}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\left(\eta_2^{\{s\}2}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\chi^{\{s\}(j)} = 0, \qquad s = \overline{1, N}, \qquad j = 1, 2. \tag{1}$$

Корни $\eta_1^{\{s\}}$ и $\eta_2^{\{s\}}$ определяются из уравнений

$$\eta^{\{s\}4} + 2A^{\{s\}}\eta^{\{s\}2} + A_1^{\{s\}} = 0, \tag{2}$$

где коэффициенты $A^{\{s\}}$ и $A_1^{\{s\}}$ являются функциями скорости нагрузки v и параметров, характеризующих материал элементов слоистой среды [7]: $\widetilde{\omega}^{\{s\}}$ — в случае сжимаемого материала и $\widetilde{\kappa}^{\{s\}}$ — в случае несжимаемого.

Рассмотрим следующие граничные условия:

при $y_2 = 0$

$$\widetilde{Q}_{21}^{\{1\}} = P_1\delta_{\theta N}\delta(y_1), \qquad \widetilde{Q}_{22}^{\{1\}} = P_2\delta(y_1), \qquad \theta = \sum_{s=1}^{N}\theta_1^{\{s\}}, \tag{3}$$

при $y_2 = -h_s$

$$\begin{gathered}
u_2^{\{s\}} = u_2^{\{s+1\}}, \qquad \widetilde{Q}_{22}^{\{s\}} = \widetilde{Q}_{22}^{\{s+1\}}, \qquad \widetilde{Q}_{21}^{\{s\}} = \theta_1^{\{s\}}\widetilde{Q}_{21}^{\{s+1\}}, \\
\big(1 - \theta_1^{\{s\}}\big)\widetilde{Q}_{21}^{\{s+1\}} = \theta_1^{\{s\}}\big(u_1^{\{s+1\}} - u_1^{\{s\}}\big), \\
u_2^{\{N\}} = 0, \qquad \big(\theta_1^{\{N\}} - 1\big)\widetilde{Q}_{21}^{\{N\}} = \theta_1^{\{N\}}u_1^{\{N\}}, \qquad s = \overline{1, N-1}.
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь параметр $\theta_1^{\{s\}} = 1$ соответствует случаю жесткого контакта между слоями, а $\theta_1^{\{s\}} = 0$ — случаю нежесткого (скользящего).

Перемещения и напряжения в формулах (3) и (4) через функции $\chi^{\{s\}(j)}$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}
u_i^{\{s\}} = -\beta_{i1}^{\{s\}(i)}\frac{\partial^2\chi^{\{s\}(i)}}{\partial y_1 \partial y - 2} + \left(\sum_{n=1}^{2}\beta_{i1}^{\{s\}(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\chi^{\{s\}(j)}, \qquad i, j = 1, 2, \qquad i \neq j, \\
\widetilde{Q}_{ij}^{\{s\}} = \left(\sum_{n=1}^{2}\alpha_{ij}^{\{s\}(n2)}\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\frac{\chi^{\{s\}(2)}}{\partial y_{2-\delta_{ij}}} + \left(\sum_{n=1}^{2}\alpha_{ij}^{\{s\}(n1)}\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\frac{\chi^{\{s\}(1)}}{\partial y_{1+\delta_{ij}}}, \\
i, j = 1, 2, \qquad s = \overline{1, N}.
\end{gathered} \tag{5}$$

В соотношениях (5) коэффициенты $\beta_{im}^{\{s\}(j)}$, $\alpha_{ij}^{\{s\}(nk)}$ также являются функциями скорости нагрузки и параметров, характеризующих материал элементов слоистой среды.

Таким образом, задача об установившейся реакции многослойного полупространства при воздействии движущейся с постоянной скоростью нагрузки сводится к определению функций $\chi^{(j)}$ с помощью уравнений (1) при граничных условиях (3) и (4). Компоненты напряженно-деформированного состояния двухслойного сжимаемого полупространства определяются по формулам (5).

Решение задачи найдем с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной y_1. Определим решение задачи в общем виде для случаев неравных и равных корней, для различных условий сопряжения элементов многослойной среды и для любой скорости движения нагрузки.

Решение преобразованных уравнений (1) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$\chi^{\{s\}(j)F} = \left[1 - \delta_{j2}^{\{s\}}\left(1 - \delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}}\right)\right]\left\{C_1^{\{s\}(j)} e^{k\gamma_1^{\{s\}}(y_2+h_s)} + C_3^{\{s\}(j)} e^{-k\gamma_2^{\{s\}}(y_2+h_s)} + \right.$$
$$\left. + \left[1 - \delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}} + \delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}}(y_2 + h_s)\right]\left[C_2^{\{s\}(j)} e^{k\gamma_2^{\{s\}}(y_2+h_s)} + C_4^{\{s\}(j)} e^{-k\gamma_1^{\{s\}}(y_2+h_s)}\right]\right\}, \qquad (6)$$

где $C_m^{\{s\}(j)}$ ($j = 1, 2$, $m = \overline{1, 4}$, $s = \overline{1, N}$) — постоянные интегрирования; k — параметр преобразования Фурье;

$$\gamma_j^{\{s\}} = k_j \eta_j^{\{s\}}, \qquad \delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}} = \begin{cases} 1, & \eta_1^{\{s\}} = \eta_2^{\{s\}}, \\ 0, & \eta_1^{\{s\}} \neq \eta_2^{\{s\}}, \end{cases} \qquad \delta_{j2}^{\{s\}} = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ 0, & j = 2. \end{cases}$$

В представлении решения (6) $k_j \equiv \sigma = |k|/k$, если $\eta_j^{\{s\}2} > 0$, и $k_j = i$, если $\eta_j^{\{s\}2} < 0$. В случае, если $\eta_j^{\{s\}}$ принимает комплексные значения, то в (6) следует положить $k_j = 1$, $\eta^{\{s\}} = \sigma \operatorname{Re} \eta_j^{\{s\}} - (-1)^j i \operatorname{Im} \eta_j^{\{s\}}$ ($j = 1, 2$).

Введем постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} &C_m^{\{s\}(1)} = C_m^{\{s\}}, \qquad C_m^{\{s\}(2)} = i\gamma_m^{\{s\}} C_m^{\{s\}}, \\ &C_{m+2}^{\{s\}(1)} = C_{m+2}^{\{s\}}, \qquad C_{m+2}^{\{s\}(2)} = i\gamma_{3-m}^{\{s\}} C_{m+2}^{\{s\}}, \qquad \gamma_m^{\{s\}} = k_m \eta_m^{\{s\}}, \qquad m = 1, 2. \end{aligned} \qquad (7)$$

Компоненты напряженно-деформированного состояния (5) в пространстве изображений с учетом (6) и (7) будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\widetilde{Q}_{nj}^{\{s\}F} = i^{1-\delta_{nj}} k^2 \sum_{m=1}^{4} \gamma_{nj}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau} k\gamma_\tau^{\{s\}}(y_2+h_{s-1})}, \\ &u_n^{\{s\}F} = i^{\delta_{1n}} k \sum_{m=1}^{4} \alpha_n^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau} k\gamma_\tau^{\{s\}}(y_2+h_{s-1})}, \\ &\tau = \delta_{m1} + \delta_{m4} + 2(\delta_{m2} + \delta_{m3}), \qquad n, j = 1, 2. \end{aligned} \qquad (8)$$

Функции $\gamma_{nj}^{\{s\}(m)}$ и $\alpha_n^{\{s\}(m)}$ в формулах (8) являются функциями параметров k, $\delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}}$, $\gamma_p^{\{s\}}$, $\beta_{im}^{\{s\}(j)}$ и $\alpha_{ij}^{\{s\}(nk)}$.

Подставляя (8) в преобразованную систему уравнений (3), (4), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_m^{\{s\}}$ ($m = \overline{1, 4}$, $s = \overline{1, N}$):

$$\sum_{m=1}^{4} \overline{\gamma}_{2q}^{\{1\}(m)} C_m^{\{1\}} = i^{\delta_{2q}-1} k^{-2} \delta_{\theta N}^{\delta_{1q}} P_q^F,$$

$$\sum_{m=1}^{4} \left(\widetilde{\alpha}_2^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau+1} k\gamma_\tau^{\{s\}} \Delta h_s} - \overline{\alpha}_2^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}}\right) = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{4}\big(\widetilde{\gamma}_{2q}^{\{s\}(m)}C_m^{\{s\}}e^{(-1)^{m+\tau+1}k\gamma_\tau^{\{s\}}\Delta h_s}-\theta_1^{\{s\}\delta_{1q}}\overline{\gamma}_{2q}^{\{s+1\}(m)}C_m^{\{s+1\}}\big)=0,$$

$$\sum_{m=1}^{4}\big\{\big[k\big(1-\theta_1^{\{s\}}\big)\overline{\gamma}_{21}^{\{s+1\}(m)}-\theta_1^{\{s\}}\overline{\alpha}_1^{\{s+1\}(m)}\big]C_m^{\{s+1\}}+ \tag{9}$$

$$+\theta_1^{\{s\}}\widetilde{\alpha}_1^{\{s\}(m)}C_m^{\{s\}}e^{(-1)^{m+\tau+1}k\gamma_\tau^{\{s\}}\Delta h_s}\big\}=0,\qquad q=1,2,\qquad s=\overline{1,N-1},$$

$$\sum_{m=1}^{4}\widetilde{\alpha}_2^{\{N\}(m)}C_m^{\{N\}}e^{(-1)^{m+\tau}k\gamma_\tau^{\{N\}}\Delta h_N}=0,$$

$$\sum_{m=1}^{4}\big[k\big(\theta_1^{\{N\}}-1\big)\widetilde{\gamma}_{21}^{\{N\}(m)}-\theta_1^{\{N\}}\widetilde{\alpha}_1^{\{N\}(m)}\big]C_m^{\{N\}}e^{(-1)^{m+\tau}k\gamma_\tau^{\{N\}}\Delta h_N}=0.$$

В формулах (9) используются следующие обозначения:

$$\Delta h_s=h_{s+1}-h_s,\qquad \overline{\gamma}_{2n}^{\{s\}(m)}=\gamma_{2n}^{\{s\}(m)}|_{y_2=-h_{s-1}},\qquad \overline{\alpha}_n^{\{s\}(m)}=\alpha_n^{\{s\}(m)}|_{y_2=-h_{s-1}},$$

$$h_0=0,\qquad \widetilde{\gamma}_{2n}^{\{s\}(m)}=\gamma_{2n}^{\{s\}(m)}|_{y_2=-h_s},\qquad \widetilde{\alpha}_n^{\{s\}(m)}=\alpha_n^{\{s\}(m)}|_{y_2=-h_s},\qquad s=\overline{1,N}.$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении многослойной упругой предварительно напряженной плиты, лежащей на жестком основании, воздействием подвижной нагрузки в области изображений Фурье сводится к решению системы алгебраических уравнений (9) относительно неизвестных $C_j^{\{s\}}$.

Полоса на жестком основании. Рассмотрим плоскую задачу для предварительно напряженного слоя, лежащего на жестком основании с начальными напряжениями [5]. Решение системы (9) в этом случае можно записать так:

$$C_m=\frac{(-1)^m(i\theta_1P_1^FU_{m1}+P_2^FU_{m2})}{\Delta(k)},\qquad m=\overline{1,4}, \tag{10}$$

где

$$\Delta(k)=N_{12}M_{34}-N_{13}M_{24}+N_{14}M_{23}+N_{23}M_{14}-N_{24}M_{13}+N_{34}M_{12},$$

$$U_{1p}=a_{q2}M_{34}-a_{q3}M_{24}+a_{q4}M_{23},\qquad U_{2p}=a_{q1}M_{34}-a_{q3}M_{14}+a_{q4}M_{13},$$

$$U_{3p}=a_{q1}M_{24}-a_{q2}M_{14}+a_{q4}M_{12},\qquad U_{4p}=a_{q1}M_{23}-a_{q2}M_{13}+a_{q3}M_{12},$$

$$p,q=1,2,\qquad p\neq q,$$

$$N_{pq}=a_{1p}a_{2q}-a_{2p}a_{1q},\qquad M_{pq}=a_{3p}a_{4q}-a_{4p}a_{3q},\qquad p,q=\overline{1,4},$$

$$a_{nm}=\overline{\gamma}_{2n}^{(m)},\qquad n=1,2,\qquad a_{3m}=\widetilde{\alpha}_2^{(m)}e^{(-1)^{m+\tau}k\gamma_\tau h},$$

$$a_{4m}=[k(\theta_1-1)\widetilde{\gamma}_{21}^{(m)}-\theta_1\widetilde{\alpha}_1^{(m)}]e^{(-1)^{m+\tau}k\gamma_\tau h},\qquad m=\overline{1,4},$$

$$b_n=i^{\delta_{2n}-1}k^{-2}\delta_{\theta N}^{\delta_{1n}}P_n^F,\qquad n=1,2,\qquad b_n=0,\qquad n=3,4.$$

Трансформанты характеристик напряженно-деформированного состояния определяются, согласно (8), с учетом (10).

Для того чтобы перейти в формулах (8) к оригиналам, следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

1. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н.* Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 3. – С. 36–54.
2. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н.* Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Там же. – № 4. – С. 35–55.
3. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н.* Определение реакции на движущуюся нагрузку двухслойного упругого полупространства с начальными напряжениями с применением комплексных потенциалов // Там же. – № 5. – С. 3–15.
4. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П.* Напряженно-деформированное состояние слоистого предварительно-напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // Системні технології. Рег. міжвуз. зб. наук. праць. Вип. 3(62). – Дніпропетровськ, 2009. – С. 93–98.
5. *Глухов Ю. П.* Об одной динамической задаче для предварительно напряженной полосы с закрепленным основанием // Вісн. Нац. Черк. ун-ту. Вип. 172. – Черкаси, 2010. – С. 20–24.
6. *Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг: Кременчуг, 2007. – 795 с.
7. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.01.2011

Yu. P. Glukhov

Multilayered pre-stressed plate with the rigid basis under the influence of a moving load. Plane problem

Within the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, we study a planar problem of the perturbation of a multilayered pre-stressed plate with the rigid basis by the surface load moving with a constant speed. As an example, the problem for a two-layered layer with the rigid basis is examined. With the help of the Fourier integral method, a fundamental solution to the problem is obtained in general form under various conditions of contact and speeds of a load.