УДК 519.21

И. А. Качанова

Большие уклонения для обратных стохастических уравнений с квадратичным ростом

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Доведено принцип великих відхилень для обернених стохастичних рівнянь, пов'язаних із сім'єю марковських процесів з малою дифузією, коефіцієнти яких залежать від малого параметра. При обгрунтуванні даного принципу встановлено рівномірну на компактах збіжність розв'язків напівлінійних параболічних рівнянь другого порядку з малим параметром при старшій похідній і коефіцієнтами, що залежать від цього параметра і слабко збігаються в $L_{2,\mathrm{loc}}$.

Обратные стохастические уравнения (ОСУ) были введены в работе [1] для вероятностного представления решений квазилинейных параболических уравнений. Затем ОСУ начали исследоваться в связи с проблемами финансовой математики, оптимального управления, теории игр, усреднения нелинейных параболических уравнений и др. Появилась необходимость в исследовании поведения решений самих ОСУ. Принцип больших уклонений для решений стохастических уравнений с винеровским процессом $w(t)$ вида

$$Y^{\varepsilon,s,x}(t) = g(X^{\varepsilon,s,x}(T)) + \int\limits_t^T f(v, X^{\varepsilon,s,x}(v), Y^{\varepsilon,s,x}(v), Z^{\varepsilon,s,x}(v))\,dv - \int\limits_t^T Z^{\varepsilon,s,x}(v)\,dw(v),$$

где

$$X^{\varepsilon,s,x}(t) = x + \int\limits_s^t b(v, X^{\varepsilon,s,x}(v))\,dv + \sqrt{2\varepsilon}\int\limits_s^t \sigma(v, X^{\varepsilon,s,x}(v))\,dw(v),$$

изучался в работах [2, 3], где функция $f(s,x,y,z)$ могла иметь рост не выше линейного по последнему аргументу. В этой работе рассматриваются уравнения, имеющие квадратичный рост по аргументу z, и, кроме того, коэффициенты уравнений для процессов $X^{\varepsilon,s,x}(t)$ $Y^{\varepsilon,s,x}(t)$ сами зависят от малого мараметра ε. При этом не требуется существование у них поточечных пределов при $\varepsilon \to 0$, эти функции могут иметь осцилляции по временной переменной.

Далее $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, A' — транспонированная к матрице A матрица. Множество непрерывных на $[0,T]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ обозначим $C([0,T];\mathbb{R}^n)$. Функция $f(t) \in C_p^1([0,T])$, если отрезок $[0,T]$ можно разбить на конечное число интервалов $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$, внутри каждого из которых функции $f(t)$ и $f'(t)$ непрерывны и имеют конечные левые и правые пределы в точках $\{t_i\}$. Через $C_p^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ обозначим класс n-мерных функций, каждая координата которых принадлежит $C_p^1([0,T])$. Для классов функций, имеющих локально суммируемые производные в смысле Соболева, используются обозначения $W^2_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ $W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$.

Через $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ обозначим вероятностное пространство, $w(t)$ — n-мерный винеровский процесс. В дальнейшем $\mathcal{F}_t$ — наименьшая σ-алгебра, порожденная винеровским процессом $\sigma\{w(s), s \leqslant t\}$, E — символ математического ожидания.

Пусть при каждом $\varepsilon > 0$ заданы функции $\sigma^{\varepsilon}_{ij}(t,x)$, $b^{\varepsilon}_i(t,x)$, i, $j = \overline{1,n}$, $f^{\varepsilon}(t,x,y)$, $g^{\varepsilon}(x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$.

Рассмотрим ОСУ вида

$$Y^{\varepsilon,s,x}(t) = g^{\varepsilon}(X^{\varepsilon,s,x}(T)) + \\ + \int\limits_t^T \left[f^{\varepsilon}(v, X^{\varepsilon,s,x}(v), Y^{\varepsilon,s,x}(v)) + \frac{1}{2\varepsilon}|Z^{\varepsilon,s,x}(v)|^2 \right] dv - \int\limits_t^T (Z^{\varepsilon,s,x}(v), dw(v)), \tag{1}$$

где

$$X^{\varepsilon,s,x}(t) = x + \int\limits_s^t b^{\varepsilon}(v, X^{\varepsilon,s,x}(v))\, dv + \sqrt{2\varepsilon} \int\limits_s^t \sigma^{\varepsilon}(v, X^{\varepsilon,s,x}(v))\, dw(v) \tag{2}$$

и докажем, что процесс $Y^{\varepsilon,s,x}(t)$ удовлетворяет принципу больших уклонений.

Через M^2 обозначим класс $\mathcal{F}_t$-согласованных процессов $\xi(t)$, $t \in [0,T]$, для которых $E\int\limits_0^T |\xi(t)|^2 dt < \infty$.

Пара $\mathcal{F}_t$-согласованных процессов $(Y^{\varepsilon,s,x}(t),\ Z^{\varepsilon,s,x}(t))$ со значениями в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ называется *решением* уравнения (1), если

a) $Z^{\varepsilon,s,x}(t) \in M^2$;

b) равенство (1) выполнено с вероятностью 1.

Обозначим $a^{\varepsilon}(t,x) = \sigma^{\varepsilon}(t,x)(\sigma^{\varepsilon}(t,x))'$. Введем предположения.

Условие I.

I_1. Функции $a^{\varepsilon}_{ij}(t,x)$, $i,j = \overline{1,n}$, непрерывны при каждом $\varepsilon > 0$. Существуют положительные постоянные λ, μ, не зависящие от ε, такие, что $\forall\, \theta \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda|\theta|^2 \leqslant (a^{\varepsilon}(t,x)\theta, \theta) \leqslant \mu|\theta|^2.$$

I_2. Функции $b^{\varepsilon}_i(t,x)$, $i = \overline{1,n}$, непрерывны при каждом $\varepsilon > 0$ и ограничены равномерно по (t,x,ε).

I_3. Функции $f^{\varepsilon}(t,x,y)$ непрерывны при каждом $\varepsilon > 0$ и ограничены равномерно по (t,x,y,ε).

I_4. Функции $g^{\varepsilon}(x)$ ограничены равномерно по (x,ε) и имеют шесть непрерывных производных при каждом $\varepsilon > 0$.

I_5. Две из отмеченных в условии I_4 производных ограничены равномерно по (x,ε).

I_6. Функции $a^{\varepsilon}_{ij}(t,x)$, $b^{\varepsilon}_i(t,x)$, $i,j = \overline{1,n}$, четырежды непрерывно дифференцируемы по x при каждом $\varepsilon > 0$, и две из этих производных ограничены равномерно по (t,x,ε).

I_7. Функции $f^{\varepsilon}(t,x,y)$ четырежды непрерывно дифференцируемы по x, y при каждом $\varepsilon > 0$, и две из этих производных ограничены равномерно по (t,x,y,ε). Смешанные производные до четвертого порядка по переменным x, y непрерывны при каждом $\varepsilon > 0$ и вторые смешанные производные ограничены равномерно по (t,x,y,ε).

При предположениях I_3 и I_4 при каждом $\varepsilon > 0$ существует решение уравнения (1) класса M^2 [4, теорема 2]. Единственность этого решения следует из [5, теорема 2.6].

Условие II. Существуют функции $a_{ij}(t)$, $b_i(t) \in C([0,T];\,\mathbb{R}^1)\bigcap C^1_p([0,T];\mathbb{R}^1)$ $(i,\ j=\overline{1,n})$ такие, что:
II_1. $a^{\varepsilon}_{ij}(t,x) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} a_{ij}(t)$;
II_2. $b^{\varepsilon}_{i}(t,x) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} b_{i}(t)$.
Условие III. Существуют функции $g(x)$, $f(t,x,y)$ такие, что:
III_1. $f^{\varepsilon}(t,x,y) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} f(t,x,y)$;
III_2. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup\limits_{x\in S_N}|g^{\varepsilon}(x)-g(x)|=0$, $\forall\, N<\infty$.

Пусть функция $u(t,x)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+a_{ij}(t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}+b_i(t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+f(t,x,u(t,x))=0,\\ t\in[0,T), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\\ u(T,x)=g(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим, что классическое (непрерывно дифференцируемое) решение для (3) существует, вообще говоря, лишь для малых T. Для построения теории, свободной от этого ограничения, используем подход, основываясь на понятии обобщенного решения [6].

Обозначим через $\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ множество функций $\varphi(t,x)$, определенных на $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих локальному условию Липшица. Через $\mathcal{E}_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ обозначим класс функций $\varphi(t,x)$ таких, что $\varphi(t,x)\in\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ и

$$\frac{\triangle^2\,\varphi}{\triangle\, l^2}=\frac{\varphi(t,x+l)-2\varphi(t,x)+\varphi(t,x-l)}{|l|^2}\geqslant-\alpha(t),$$

где $\alpha(t)\leqslant C_\delta<\infty$ при $0\leqslant t\leqslant T-\delta<T$, C_δ — положительная постоянная.

Следуя [6], введем понятие обобщенного решения задачи (3).

Определение. Обобщенным решением задачи (3) назовем функцию $u(t,x) \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую уравнению из (3) почти всюду и имеющую соответствующее начальное значение из (3).

Известно [6], что для (3) обобщенное решение единственно в классе ограниченных функций из $\mathcal{E}_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$.

Основные результаты. Сформулируем результаты работы для случая $s=0$, хотя они очевидным образом переформулируются для произвольного $s\in[0,T]$. Доказательство принципа больших уклонений для процесса $Y^{\varepsilon,x}(t)=Y^{\varepsilon,0,x}(t)$ использует следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть при каждом $\varepsilon>0$ функции $a^{\varepsilon}_{ij}(t,x)$, $b^{\varepsilon}_{i}(t,x)$, $f^{\varepsilon}(t,x,y)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}f^{\varepsilon}(t,x,y)$, $g^{\varepsilon}(x)$ измеримы, ограничены и функции $a^{\varepsilon}_{ij}(t,x)$ непрерывны, функции $g^{\varepsilon}(x)\in W^2_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $p\geqslant n+1$. Тогда при каждом $\varepsilon>0$ задача Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}+\varepsilon a^{\varepsilon}_{ij}(t,x)\dfrac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial x_i\partial x_j}+a^{\varepsilon}_{ij}(t,x)\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_i}\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}+b^{\varepsilon}_i(t,x)\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_i}+\\ \qquad +f^{\varepsilon}(t,x,u^{\varepsilon}(t,x))=0, \qquad t\in[0,T), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\\ u^{\varepsilon}(T,x)=g^{\varepsilon}(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4}$$

имеет единственное решение в классе $u^{\varepsilon}(t,x)\in W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, $p\geqslant n+1$.

Семейство мер $\nu^\varepsilon(A)$ на метрическом пространстве $(X,\rho,\mathcal{B})$ с метрикой ρ и борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом $I(x)$, если [7, с. 118]:

для любого $a\geqslant 0$ множество $\{x\colon I(x)\leqslant a\}$ компактно;

для любого открытого множества $A\in\mathcal{B}$, $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\nu^\varepsilon(A)\geqslant-\inf\{I(x),x\in A\}$;

для любого замкнутого множества $A\in\mathcal{B}$, $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\nu^\varepsilon(A)\leqslant-\inf\{I(x),x\in\ A\}$.

Теорема 2. *Пусть условия I–III выполнены. Тогда семейство вероятностных мер* $\nu^\varepsilon(A)=P(Y^{\varepsilon,x}\in A)$ *на пространстве* $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ *с равномерной метрикой удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия*

$$I'(\psi)=\inf\{I(\varphi)\colon \varphi(t)\ \textit{абсолютно непрерывна и}\ \varphi(0)=x\mid\psi(t)=u(t,\varphi(t)),\\ \forall\, t\in[0,T]\},\tag{5}$$

где функционал $I(\varphi)$ *определяется формулой*

$$I(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^T(a^{-1}(t)(b(t)-\dot\varphi(t)),b(t)-\dot\varphi(t))\,dt,\\ \qquad\textit{если}\quad \varphi(t)\quad \textit{абсолютно непрерывна и}\quad \varphi\ (0)=x,\\ +\infty,\quad \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Доказательство. Используем связь между решением ОСУ и решением задачи Коши для уравнения (4). Применив обобщенную формулу Ито [8, гл. 2, § 10] к $u^\varepsilon(t,x)$ и процессу (2), получим, что процесс $Y^{\varepsilon,x}(t)$ имеет представление

$$Y^{\varepsilon,x}(t)=u^\varepsilon(t,X^{\varepsilon,x}(t)),\qquad X^{\varepsilon,x}(t)=X^{\varepsilon,0,x}(t),$$

с функцией $Z^{\varepsilon,x}(t)=Z^{\varepsilon,0,x}(t)=\sqrt{2\varepsilon}(\nabla u^\varepsilon\sigma^\varepsilon)(t,X^{\varepsilon,x}(t)),t\in[0,T]$. Семейство мер, порожденное процессами $X^{\varepsilon,x}(t)$, на пространстве $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $I(\varphi)$ [9, теорема 6.1]. Методами, развитыми в [9], аналогично доказательству [9, теорема 1.1] устанавливается, что задача (3) имеет единственное решение в классе $\mathcal{E}_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ и равномерно на компактах

$$\sup_{\substack{x\in\mathcal{K}\\ s\in\ [0,T]}}|u^\varepsilon(s,x)-u(s,x)|\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0.$$

Применяя “contraction” принцип [10, теорема 2.4], получаем нужный результат.

1. *Pardoux E., Peng S.* Adapted solution of backward stochastic differential equation // Systems and Control Lett. – 1990. – **14**, No 1. – P. 55–61.
2. *Essaky E. H.* Large deviation for BSDE with subdifferential operator // Comptes Rendus Mathematique. – 2008. – **346**, No 1–2. – P. 75–78.
3. *Rainero S.* Un principle de grandes déviations pour une équation différentielle stochastique progressive rétrograde // Comptes Rendus Mathematique. – 2006. – **343**, No 2. – P. 141–144.
4. *Braind Ph., Hu Y.* BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value // Prob. Theory Relat. Fields. – 2006. – **136**, No 4. – P. 604–618.
5. *Kobylanski M.* Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth // Ann. Probab. – 2000. – **28**. – P. 558–602.
6. *Кружков С. Н.* Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. – 1966. – **70**. – С. 394–415.

7. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – Москва: Наука, 1979. – 424 с.
8. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. – Москва: Наука, 1977. – 400 с.
9. *Махно С. Я.* Параболические уравнения с малым параметром и большие уклонения для диффузионных процессов // Матем. сб. – 1994. – **185**, № 11. – С. 41–56.
10. *Varadhan S. R. S.* Large deviations and applications. – Filadelphia: SIAM, 1984. – 75 p.

*Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк*

Поступило в редакцию 27.12.2010

I. A. Kachanova

Large deviations for backward stochastic equations with quadratic growth

We prove the large deviation principle for backward stochastic equations related to a family of Markov processes with small diffusion, where the coefficients of these forward-backward equations depend on a small parameter. To prove this principle, we show the convergence of solutions of second-order semilinear parabolic partial equations, which is uniform on compact sets, with small parameter by the second derivative and coefficients which depend on this parameter and weakly converge in $L_{2,\mathrm{loc}}$.