УДК 517.95

І. Я. Кміть, Л. Рекке

Фредгольмовість періодичних задач для систем рівнянь біжучих хвиль

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

Доводиться альтернатива Фредгольма для загальної лінійної одновимірної строго гіперболічної системи першого порядку з періодичними умовами за часовою змінною та умовами відображення за просторовою змінною. Вибираються два банахові простори неперервних функцій, які задовольняють умову оптимальної регулярності між розв'язками та правими частинами диференціальних рівнянь і показується, що диференціальний оператор задачі є бієктивним з одного простору на інший. Для доведення фредгольмовості задача регуляризується шляхом побудови правого параметриксу в явному вигляді. Контроль над малими знаменниками відбувається через коефіцієнти відображення в крайових умовах.

У роботі досліджується загальна лінійна одновимірна гіперболічна система першого порядку

$$\omega\partial_t u_j + a_j(x,t)\partial_x u_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}(x,t)u_k = f_j(x,t), \qquad j \leqslant n, \qquad (x,t) \in (0,1)\times\mathbb{R}, \tag{1}$$

з періодичними умовами за часовою змінною

$$u_j(x,t+2\pi) = u_j(x,t), \qquad j \leqslant n, \qquad (x,t) \in [0,1]\times\mathbb{R}, \tag{2}$$

та умовами відображення за просторовою змінною

$$\begin{aligned} u_j(0,t) &= \sum_{k=m+1}^{n} r_{jk}^0 u_k(0,t), \qquad j \leqslant m, \qquad t\in\mathbb{R},\\ u_j(1,t) &= \sum_{k=1}^{m} r_{jk}^1 u_k(1,t), \qquad m+1 \leqslant j \leqslant n, \qquad t\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Тут $1 \leqslant m < n$, $\omega > 0$ і r_{jk}^0, r_{jk}^1 є фіксованими дійсними числами. Праві частини $f_j\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ і коефіцієнти a_j, $b_{jk}\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є 2π-періодичними за t. Основним результатом роботи є критерій розв'язності (альтернатива Фредгольма) у деякому підпросторі простору неперервних функцій. За певних умов на вихідні дані ми показуємо, що задача (1)–(3) моделюється фредгольмовим оператором нульового індексу, тобто задача є розв'язною тоді і лише тоді, коли права частина $f = (f_1,\ldots,f_n)$ є ортогональною до всіх розв'язків відповідної однорідної спряженої задачі. Відзначимо, що фредгольмовість лінеаризацій нелінійних задач відіграє ключову роль при розв'язанні останніх за допомогою теореми про неявну функцію у банахових просторах та зведення до біфуркаційних рівнянь за схемою Ляпунова–Шмідта [1, 2].

Покладемо $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = [b_{jk}]_{j,k=1}^n$. Позначимо через $W = C_{2\pi}([0,1] \times \mathbb{R})^n$ простір правих частин з нормою $\|f\|_W = \max\limits_{j \leqslant n} \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |f(x,t)|$. Для заданих $\omega > 0$ і $a_j \in C^1([0,1] \times [0,2\pi])$ таких, що $a_j \neq 0$ для всіх $j \leqslant n$, введемо простір розв'язків

$$U(\omega, a) = \{u \in W \colon [\omega\partial_t u_j + a_j \partial_x u_j]_{j=1}^n \in W\}$$

з нормою

$$\|u\|^2_{U(\omega,a)} = \|u\|^2_W + \|[\omega\partial_t u_j + a_j\partial_x u_j]_{j=1}^n\|^2_W,$$

де $\partial_t u_j$ і $\partial_x u_j$ розуміємо в сенсі узагальнених похідних. Зауважимо, що добуток $a_j \partial_x u_j$ є коректно визначеним в $\mathcal{D}'$ для довільного $j \leqslant n$. Розглянемо замкнений підпростір $V(\omega, a, r) = \{u \in U(\omega, a) \colon \text{виконується (3)}\}$. Тут $r = (r^0, r^1)$, де $r^0 = [r^0_{jk}]_{j=1,k=m+1}^{mn}$, $r^1 = [r^1_{jk}]_{j=m+1,k=1}^{nm}$ є матриці, складені з коефіцієнтів r^0_{jk} і r^1_{jk}. Далі використовуватимемо позначення $b^0 = \operatorname{diag}\{b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}\}$ і $b^1 = b - b^0$. Введемо оператори $\mathcal{A}(\omega, a, b^0) \in \mathcal{L}(V(\omega,a,r); W)$ і $\mathcal{B}(b^1) \in \mathcal{L}(W)$ за правилами

$$\mathcal{A}(\omega,a,b^0)u = [\omega\partial_t u + a_j\partial_x u_j + b_{jj}u_j]_{j=1}^n, \qquad \mathcal{B}(b^1)u = \left[\sum_{j\neq k} b_{jk}u_k\right]_{j=1}^n.$$

Тоді операторне рівняння

$$\mathcal{A}(\omega,a,b^0)u + \mathcal{B}(b^1)u = f \tag{4}$$

є абстрактним зображенням задачі (1)–(3). Покладемо

$$\begin{aligned} L_a &= \exp\Big\{\omega \max_{j,x,t} |\partial_t a_j^{-1}|\Big\}, \\ R(a,b) &= \max_{m+1\leqslant j\leqslant n} \max_{1\leqslant k\leqslant m} \max_{x,t,\xi,\tau} \exp\bigg\{\bigg(\frac{b_{jj}}{a_j}\bigg)(x,t) - \bigg(\frac{b_{kk}}{a_k}\bigg)(\xi,\tau)\bigg\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Позначимо через $\tau = \omega_j(\xi; x, t)$ рівняння j-тої характеристики системи (1), яка проходить через точку (x,t). Нижченаведена теорема стверджує, що пара просторів $(W, V(\omega,a,r))$ забезпечує оптимальну регулярність між розв'язками та правими частинами рівнянь.

Теорема 1. *Нехай* $b_{jj} \in W$,

$$a_j \in C^1([0,1]\times[0,2\pi]), \qquad \min_{x,t}|a_j| > 0 \qquad \text{для всіх} \qquad j \leqslant n. \tag{6}$$

$$q = R(a,b) \sum_{j,l=m+1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |r^1_{jk} r^0_{kl}| < 1, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &L_a R(a, \partial_x a - b) \times \\ &\quad \times \sum_{j,l=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{x,t}\left|\left(\frac{a_k}{a_j}\right)(1, \omega_j(1;x,t))\left(\frac{a_l}{a_k}\right)(0, \omega_k(0;1,\omega_j(1;x,t)))\right| |r^1_{jk}r^0_{kl}| < 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Тоді для будь-якого $c > 0$ *такого, що*

$$\sum_{j=1}^{n} \|b_{jj}\|_\infty + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=m+1}^{n} |r^0_{jk}| + \sum_{j=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|r^1_{jk}| \leqslant c \tag{9}$$

існує $C > 0$ таке, що оператор $\mathcal{A}(\omega, a, b^0)$ є ізоморфізмом з $V(\omega, a, r)$ на W і

$$\|\mathcal{A}(\omega, a, b^0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W;V(\omega,a,r))} \leqslant C.$$

Позначимо через $[\cdot,\cdot]_W\colon W^* \times W \to \mathbb{R}$ дуальну пару і сформулюємо альтернативу Фредгольма для розглядуваної задачі.

Теорема 2. *Припустимо, що $b_{jk} \in C(0,1;C^1[0,2\pi])$, $qL_a^2 < 1$, виконуються умови* (6), (8) *та*

$$a_j \neq a_k \qquad \text{для всіх} \quad j \neq k \qquad \text{і для всіх} \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,2\pi]. \tag{10}$$

Тоді мають місце такі твердження:

(i) $\mathcal{A}(\omega, a, b^0) + \mathcal{B}(b^1) \in \mathcal{L}(V(\omega,a,r);W)$ є фредгольмовим оператором 0-го індексу;

(ii) $Im(\mathcal{A}(\omega, a, b^0) + \mathcal{B}(b^1)) = \{f \in W\colon [f,u]_W = 0$ для всіх $u \in \ker(\mathcal{A}(\omega, a, b^0) + \mathcal{B}(b^1))^*\}$.

У роботах [3, 4] ми запропонували загальний підхід до доведення фредгольмовості для одновимірних гіперболічних систем першого порядку і застосували його до часткового випадку системи (1)–(3) з коефіцієнтами, незалежними від часу. Тут ми поширюємо цей підхід на загальні гіперболічні системи першого порядку, використовуючи цілком відмінну техніку.

Про банаховість простору розв'язків.

Лема 1. *Простір $U(\omega, a)$ є повним.*

Доведення. У доведенні вважатимемо, що $a = \operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n)$. Нехай $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ — фундаментальна послідовність в $U(\omega,a)$. Тоді $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ і $(\partial_t u^k + a\partial_x u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ є фундаментальними послідовностями в W, де $\partial_t u^k$ та $\partial_x u^k$ розуміємо в сенсі узагальнених похідних. Оскільки W є повним, то існують v, $w \in W$ такі, що $u^k \to v$ в W, $\omega\partial_t u^k + a\partial_x u^k \to w$ в W при $k \to \infty$. Залишається довести, що $\omega\partial_t v + a\partial_x v = w$ в $\mathcal{D}'$. Розглянемо C^1-послідовність $v_k \to v$ в W і гладку функцію $\varphi\colon (0,1)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^n$ з компактним носієм. Маємо, що $\langle \omega\partial_t v + a\partial_x v, \varphi\rangle_{\mathcal{D}} = -\langle v, \omega\partial_t\varphi + \partial_x(a\varphi)\rangle_C = \lim\limits_{k\to\infty}\langle v^k, \omega\partial_t\varphi + \partial_x(a\varphi)\rangle_C = \lim\limits_{k\to\infty}\langle \omega\partial_t v^k + a\partial_x v^k, \varphi\rangle_{\mathcal{D}} = \langle w,\varphi\rangle_{\mathcal{D}}$.

Властивість ізоморфізму (доведення теореми 1). Нехай $f \in W$ є довільною, але фіксованою функцією з простору W. Достатньо показати, що існує єдина функція $u \in V(\omega,a,r)$, яка задовольняє систему

$$\omega\partial_t u_j + a_j(x,t)\partial_x u_j + b_{jj}(x,t)u_j = f_j(x,t), \qquad j \leqslant n, \tag{11}$$

умови (2), (3) і апріорну оцінку

$$\|u\|_{V(\omega,a,r)} \leqslant C\|f\|_W, \tag{12}$$

де C не залежить від f. Позначимо

$$c_j(\xi;x,t) = \exp\int\limits_x^\xi \left(\frac{b_{jj}}{a_j}\right)(\xi_1, \omega_j(\xi_1;x,t))\,d\xi_1, \qquad \beta_j(\xi;x,t) = \frac{c_j(\xi;x,t)}{a_j(\xi,\omega_j(\xi;x,t))}.$$

Тоді за умови (8) довільний неперервний розв'язок системи (1) визначається формулою

$$u_j(x,t) = c_j(0;x,t)u_j(0,\omega_j(0;x,t)) + \int\limits_0^x \beta_j(\xi;x,t)f_j(\xi,\omega_j(\xi;x,t))\,d\xi, \qquad j \leqslant n. \tag{13}$$

Крайові умови (3) еквівалентні таким двом умовам:

$$u_j(0,t) = \sum_{k=m+1}^{n} r_{jk}^0 u_k(0,t), \qquad j \leqslant m, \tag{14}$$

$$c_j(0;1,t)u_j(0,\omega_j(0;1,t)) - \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=m+1}^{n} r_{jk}^1 r_{kp}^0 c_k(0;1,t)u_p(0,\omega_k(0;1,t)) =$$

$$= -\int_0^1 \beta_j(\xi;1,t)f_j(\xi,\omega_j(\xi;1,t))\,d\xi + \sum_{k=1}^{m} r_{jk}^1 \int_0^1 \beta_k(\xi;1,t)f_k(\xi,\omega_k(\xi;1,t))\,d\xi, \tag{15}$$

$m+1 \leqslant j \leqslant n.$

Зафіксуємо $m+1 \leqslant j \leqslant n$ і покладемо $\tau = \omega_j(0;1,t)$. Тоді $t = \omega_j(1;0,\tau)$. Введемо позначення $d_{jkp}(\theta) = c_j^{-1}(0;1,\omega_j(1;0,\tau))c_k(0;1,\omega_j(1;0,\tau))r_{jk}^1 r_{kp}^0$. Тоді рівність (15) записується у вигляді

$$u_j(0,\tau) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=m+1}^{n} d_{jkp}(\tau)u_p(0,\omega_k(0;1,\omega_j(1;0,\tau))) + F_j(\tau), \qquad m+1 \leqslant j \leqslant n, \tag{16}$$

де

$$F_j(\tau) = c_j^{-1}(0;1,\omega_j(1;0,\tau))\Bigg[-\int_0^1 \beta_j^{-1}(\xi;1,\omega_j(1;0,\tau))f_j(\xi,\omega_j(\xi;0,\tau))\,d\xi +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} r_{jk}^1 \int_0^1 \beta_k(\xi;1,\omega_j(1;0,\tau))f_k(\xi,\omega_k(\xi;1,\omega_j(1;0,\tau)))\,d\xi\Bigg]. \tag{17}$$

Ми отримали систему лінійних функціональних рівнянь щодо функцій $u_j(0,\tau)$, $m+1 \leqslant j \leqslant n$. Оператор правої частини відображає простір неперервних 2π-періодичних функцій в себе, а також є стиском завдяки умові $q < 1$. За теоремою Банаха про нерухому точку система (16) має єдиний неперервний 2π-періодичний розв'язок $(u_{m+1}(0,\tau),\ldots,u_n(0,\tau))$. Таким чином, враховуючи (14), задача (11), (2), (3) має єдиний неперервний 2π-періодичний розв'язок, який визначається формулою (13). Функція $(u_{m+1}(0,\tau),\ldots,u_n(0,\tau))$ може бути знайдена методом послідовних наближень, а відтак справедливим є операторне зображення

$$u_j(0,\tau) = \sum_{l=1}^{\infty}(D_j^l F)(\tau), \qquad m+1 \leqslant j \leqslant n, \tag{18}$$

де $D_j^0 F = F_j$, $(D_j^1 F)(\tau) = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{p=m+1}^{n} d_{jkp}(\tau)F_p(\omega_k(0;1,\omega_j(1;0,\tau)))$ і

$$(D_j^l F)(\tau) = [D_j^1(D_j^{l-1}F)](\tau). \tag{19}$$

Враховуючи (14), отримуємо оцінку

$$\|u(0,\cdot)\|_{C[0,2\pi]} \leqslant C\|f\|_W, \tag{20}$$

яка є справедливою для деякої константи C, що не залежить від f і u. Беручи тепер до уваги (13), встановлюємо апріорну оцінку

$$\|u\|_W \leqslant C\|f\|_W \tag{21}$$

з новою константою $C > 0$, що не залежить від f і u. Зауважимо, що $u_j(0, \omega_j(0; x, t))$, $f_j(\xi, \omega_j(\xi; x, t))$ і $(b_{jj}/a_j)(\xi, \omega_j(\xi; x, t))$ є розподілами уздовж j-го характеристичного напрямку через точку (x, t), а відтак вони є слабкими розв'язками рівняння $\omega\partial_t w_j + a_j(x, t)\partial_x w_j = 0$. Тому неважко показати, що функція u, визначена формулою (13), задовольняє рівняння (11) у сенсі розподілів. Остаточна апріорна оцінка (12) тепер випливає з рівностей $\omega\partial_t u_j + a_j(x, t)\partial_x u_j = -b_{jj}(x, t)u_j + f_j(x, t)$, $j \leqslant n$.

Альтернатива Фредгольма (доведення теореми 2). За теоремою 1 оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V(\omega, a, r); W)$ є фредгольмовим тоді і лише тоді, коли є фредгольмовим $I + \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(W)$, де I — тотожний оператор на W. Будемо використовувати такий критерій фредгольмовості (див. [3, лема 11; 5, твердження 5.7.1]).

Лема 2. *Нехай W — деякий банахів простір, I — тотожний оператор на W, $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(W)$, причому $\mathcal{C}^2$ — компактний оператор. Тоді $I + \mathcal{C}$ є фредгольмовим оператором нульового індексу.*

Покладемо $\mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$ і застосуємо лему 2, тобто покажемо, що $\mathcal{C}^2$ є компактним оператором. Для цього будемо використовувати критерій передкомпактності в просторі неперервних функцій. Нехай $N \subset W$ — деяка обмежена множина і $M = \mathcal{C}^2(N)$. Оскільки $\mathcal{C}^2 \in \mathcal{L}(W)$ є обмеженим оператором, то M є обмеженою в W. Залишається перевірити властивість одностайної неперервності множини M. Покладемо $\widetilde{u} = \mathcal{C}^2 f$. Отже, необхідно довести, що існує така функція $\alpha\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, що $\alpha(p) \to 0$ при $p \to 0$ і має місце оцінка

$$\|\widetilde{u}(x + h_1, t + h_2) - \widetilde{u}(x, t)\|_W \leqslant \alpha(|h|) \tag{22}$$

для всіх $\widetilde{u} \in M$ і $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Позначимо $u = \mathcal{A}^{-1} f$. Тоді

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_j(x, t) = &\sum_{k=m+1, k\neq j}^{n} b_{jk}(x, t) c_k(0; x, t) \sum_{l=0}^{\infty} (D_k^l F)(\omega_k(0; x, t)) + \\ &+ \sum_{k=1, k\neq j}^{m} b_{jk}(x, t) c_k(0; x, t) \sum_{p=m+1}^{n} r_{kp}^0 \sum_{l=0}^{\infty} (D_p^l F)(\omega_p(0; x, t)) + \\ &+ \sum_{k=1, k\neq j}^{n} b_{jk}(x, t) \int_0^x \beta_k(\xi; x, t) \sum_{s=1, s\neq k}^{n} (b_{ks} u_s)(\xi, \omega_k(\xi; x, t))\, d\xi, \qquad j \leqslant n, \end{aligned} \tag{23}$$

де $(D_j^l F)(\tau)$ задається формулою (19) і

$$\begin{aligned} F_p(\tau) = c^{-1}(0; 1, \omega_p(1; 0, \tau)) \Bigg[&- \int_0^1 \beta_p(\xi; 1, \omega_p(1; 0, \tau)) \sum_{s=1, s\neq p}^{n} (b_{ps} u_s)(\xi, \omega_p(\xi; 0, \tau))\, d\xi + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} r_{pk}^1 \int_0^1 \beta_k(\xi; 1, \omega_p(1; 0, \tau)) \sum_{s=1, s\neq k}^{n} (b_{ks} u_s)(\xi, \omega_k(\xi; 1, \omega_p(1; 0, \tau)))\, d\xi \Bigg]. \end{aligned} \tag{24}$$

Перетворимо вираз (23) для $\widetilde{u}$ таким чином, щоб $u|_{x=0}$ і f у правій частині не залежали від x і t. Перетворення проілюструємо на прикладі інтегрального виразу $I_{ks}(x,t) = \int\limits_0^x \beta_k(\xi;x,t)(b_{ks}u_s)(\xi,\omega_k(\xi;x,t))\,d\xi$ для довільно фіксованих k і $s \ne k$ (перетворення решти інтегралів здійснюється аналогічно). Використовуючи формулу (13) і припущення (10), отримуємо

$$I_{ks}(x,t) = \int\limits_0^x \beta_k(\xi;x,t)b_{ks}(\xi,\tau)\Bigg[c_s(0;\xi,\tau)u_s(0,\omega_s(0;\xi,\tau)) +$$

$$+ \int\limits_0^{\xi} \beta_s(\xi_1;\xi,\tau)f_s(\xi_1,\omega_s(\xi_1;\xi,\tau))\,d\xi_1\bigg|_{\tau=\omega_k(\xi;x,t)}\Bigg]\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{\omega_k(0;x,t)}^{\omega_s(0;x,t)} \beta_k(\rho;x,t)b_{ks}(\rho,\omega_k(\rho;x,t))u_s(0,\tau)|J(0,\rho)|\Big|_{\rho=\theta(0,\tau;x,t)}\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^x \int\limits_{\omega_k(\xi;x,t)}^{\omega_s(\xi;x,t)} \beta_k(\rho;x,t)b_{ks}(\rho,\omega_k(\rho;\xi,\tau))\beta_s(\xi;\rho,\omega_k(\rho;\xi,\tau)) \times$$

$$\times |J(\xi,\rho)|\Big|_{\rho=\theta(\xi,\tau;x,t)} f_s(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

де $\theta(\xi,\tau;x,t)$ позначає x-координату точки, у якій перетинаються характеристики $\omega_k(\xi_1;x,t)$ і $\omega_s(\xi_1;\xi,\tau)$, $J(\xi,\rho)$ позначає якобіан відповідного перетворення змінних:

$$J(\xi,\rho) = \left(\frac{a_k a_j}{a_k - a_j}\right)(\rho,\omega_j(\rho))\exp\left\{\int\limits_{\xi}^{\rho}\left(\frac{\partial_2 a_k}{a_k^2}\right)(\eta,\omega_k(\eta;\rho,\omega_j(\rho)))\,d\eta\right\}.$$

Отже, з огляду на (20) і припущення гладкості щодо a_j і b_{ij}, справедливою є оцінка

$$|I_{ks}(x+h_1,t+h_2) - I_{ks}(x,t)| \leqslant C_I|h|\|f\|_W, \tag{25}$$

де C_I не залежить від x, t, $k \ne s$, $h \in \mathbb{R}^2$ і f. Покажемо тепер, що подібна оцінка виконується для інтегралів у правій частині оператора $(D_p^0 F)(\omega_p(0;x,t)) = F_p(\omega_p(0;x,t))$. Для прикладу розглянемо інтеграл $J_0(x,t) = I_{ps}(1,\omega_p(1;0,\omega_p(0;x,t))) = I_{ps}(1,\omega_p(1;x,t))$. Зауважимо, що L_a є спільною константою Ліпшиця функцій $\omega_p(\xi;x,t)$ за змінною t, а $L_a\omega \max\limits_{j,x,t}|a_j^{-1}|$ є спільною константою Ліпшиця функцій $\omega_p(\xi;x,t)$ за змінною x. Отже, враховуючи (25), маємо оцінку

$$|J_0(\omega_p(1;x+h_1,t+h_2)) - J_0(\omega_p(1;x,t))| \leqslant C_I L_a\Big(1 + \omega\max_{j,x,t}|a_j^{-1}|\Big)|h|\|f\|_W,$$

яка є рівномірною за $m+1 \leqslant p \leqslant n$, $s \leqslant n$, $p \ne s$ і $f \in \mathbb{N}$. Звідси

$$|(D_p^0 F)(\omega_p(0;x+h_1,t+h_2)) - (D_p^0 F)(\omega_p(0;x,t))| \leqslant C_F|h|\|f\|_W, \tag{26}$$

де константа C_F не залежить від x, t, $m+1 \leqslant p \leqslant n$, h і $f \in N$, причому $C_F \geqslant C_I$. Наступну оцінку встановлюємо для інтегральних виразів, що входять до зображення оператора $(D_k^1 F)(\omega_k(0; x, t))$, де $m+1 \leqslant k \leqslant n$. Для прикладу розглянемо вираз $J_1(x, t) = I_{ps}(1, \omega_p(1; 0, \omega_l(0; 1, \omega_k(1; x, t))))$. Беручи до уваги (25), отримуємо

$$|J_1(x+h_1, t+h_2) - J_1(x, t)| \leqslant C_I L_a^3 \Big(1 + \omega \max_{j,x,t} |a_j^{-1}|\Big) |h| \|f\|_W.$$

В загальному для довільного $q \in \mathbb{N}_0$ справедливою є оцінка

$$|J_q(x+h_1, t+h_2) - J_q(x, t)| \leqslant C_I L_a^{2q+1} \Big(1 + \omega \max_{j,x,t} |a_j^{-1}|\Big) |h| \|f\|_W, \tag{27}$$

де $J_q(x, t)$ позначає довільний фіксований інтеграл у зображенні $(D_p^q F)(\omega_p(0; x, t))$. Повертаючись тепер до (23) і беручи до уваги (25)–(27), а також припущення теореми $qL_a^2 < 1$, отримуємо потрібну оцінку (22).

1. *Chow S.-N., Hale J. K.* Methods of bifurcation theory. – New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 1982. – 515 p.
2. *Kielhöfer H.* Bifurcation theory. An introduction with applications to PDEs. – New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 2004. – 346 p.
3. *Kmit I., Recke L.* Fredholm Alternative for periodic-Dirichlet problems for linear hyperbolic systems // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – **335**. – P. 355–370.
4. *Kmit I., Recke L.* Fredholmness and smooth dependence for linear hyperbolic periodic-Dirichlet problems. – Berlin: DFG Research Center Matheon, 2010. – Preprint 701. – P. 1–22.
5. *Zeidler E.* Applied functional analysis. Main principles and their applications. – New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. – 404 p.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів
Інститут математики, Берлінський університет
ім. Гумбольдта

Надійшло до редакції 10.01.2011

I. Ya. Kmit, L. Recke

Fredholm property of periodic problems for systems of traveling-wave equations

We prove the Fredholm alternative for the general linear first-order strictly hyperbolic system in a single spatial variable with periodicity conditions in time and reflection boundary conditions in space. We choose Banach spaces of continuous functions providing an optimal regularity relation between the solutions and the right-hand sides of equations and prove that a differential part of the problem is modeled as a bijective operator from one space onto another. To prove the Fredholmness, we regularize the problem by explicitly constructing a right parametrix. The problem under consideration allows a control over small divisors via reflection coefficients in the boundary conditions.