УДК 517.5

Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов

О граничном поведении регулярных решений уравнений Бельтрами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

В роботі отримано інтегральні умови на дилатаційне відношення рівнянь Бельтрамі, за яких має місце гомеоморфне продовження загальних гомеоморфних розв'язків класу $W^{1,1}_{\rm loc}$ на межу у випадку обмежених опуклих областей та обмежених областей з гладкими межами класу C^1. Крім того, наведено критерії усувності ізольованих особливостей розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі.

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. связное и открытое подмножество в $\mathbb{C}$, и пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ почти всюду (п. в.) в D. Уравнением Бельтрами называется уравнение вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

где $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется комплексным коэффициентом, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \ - \tag{2}$$

дилатационным отношением для уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется вырожденным, если $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$.

Теорема существования гомеоморфных решений класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ была доказана для многих вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, [1–4]).

Об устранении изолированных особенностей. Начнем, прежде всего, с критериев устранимости изолированных особенностей.

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, и пусть f — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ в $D \setminus \{z_0\}$. Предположим, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r k_\mu(r)} = \infty, \tag{3}$$

где $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и $k_\mu(r)$ — среднее значение $K_\mu(z)$ по окружности $|z - z_0| = r$. Тогда f имеет непрерывное продолжение в D.

Отсюда мы имеем, в частности, следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и пусть f — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ в $D \setminus \{z_0\}$. Если*

$$k_\mu(r) = O\left(\log \frac{1}{r}\right) \qquad при \qquad r \to 0, \tag{4}$$

то f имеет непрерывное продолжение в D.

Следствие 2. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $x_0 \in D$, и пусть f — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ в $D \setminus \{z_0\}$. Если*

$$k_\mu(r) = O\left(\log \frac{1}{r} \log\log \frac{1}{r} \cdots \log \cdots \log \frac{1}{r}\right) \qquad при \qquad r \to 0, \tag{5}$$

то f имеет непрерывное продолжение в D.

Продолжение решений на границы. Наиболее простой критерий может быть сформулирован для обратных отображений гомеоморфных решений уравнения Бельтрами.

Теорема 2. *Пусть D и D' — ограниченные выпуклые области или ограниченные области с гладкими границами в $\mathbb{C}$. Если $f\colon D \to D'$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_\mu \in L^1(D)$, то f^{-1} имеет непрерывное продолжение в $\overline{D'}$.*

Однако, как показывают соответствующие примеры (см., например, предложение 6.3 в [2]), любая степень интегрируемости $K_\mu \in L^p(D)$, $p \in [1, \infty)$, не гарантирует продолжение f на границу по непрерывности. Условия для этого имеют более сложную природу.

Теорема 3. *Пусть D и D' — ограниченные выпуклые области или ограниченные области с гладкими границами в $\mathbb{C}$. Предположим, что $f\colon D \to D'$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu||_1(z_0, r)} = \infty \qquad \forall\, z_0 \in \partial D \tag{6}$$

для некоторого $\delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, где $d(z_0) = \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$ и

$$\|K_\mu\|_1(z_0, r) = \int\limits_{D \cap S(z_0, r)} K_\mu \, ds. \tag{7}$$

Тогда f имеет непрерывное продолжение на $\overline{D}$, которое гомеоморфно отображает $\overline{D}$ на $\overline{D'}$.

Приведем также критерий продолжимости для отображений, квазиконформных в среднем.

Теорема 4. *Пусть D и D' — ограниченные выпуклые области или ограниченные области с гладкими границами в $\mathbb{C}$. Предположим, что $f\colon D \to D'$ — гомеоморфное решение класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ уравнения Бельтрами* (1) *с*

$$\int\limits_D \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) < \infty \tag{8}$$

для выпуклой возрастающей функции $\Phi\colon [0,\infty]\to[0,\infty]$. *Если*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)}=\infty \tag{9}$$

для некоторого $\delta_0>\Phi(0)$, *то* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f}\colon \overline{D}\to\overline{D'}$.

Следующая теорема показывает, что условие (9) является не только достаточным, но и необходимым условием для продолжимости на границу отображений, квазиконформных в среднем.

Теорема 5. *Пусть* $\Phi\colon [0,\infty]\to[0,\infty]$ *— выпуклая возрастающая функция такая, что*

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)}<\infty \tag{10}$$

для некоторого $\delta_*\in(\tau_0,\infty)$, *где* $\tau_0\colon=\Phi(0)$. *Тогда существует диффеоморфное решение* f *уравнения Бельтрами* (1), *отображающее проколотый единичный круг* $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ *на кольцо* $\mathfrak{R}=\{\zeta\in\mathbb{C}\colon 1<|\zeta|<R\}$ *такое, что*

$$\int\limits_{\mathbb{D}}\Phi(K_\mu(z))\,dm(z)<\infty, \tag{11}$$

но f *не имеет продолжения в начало координат по непрерывности.*

Наш метод доказательства теорем о граничном поведении решений позволяет перенести все сформулированные выше результаты на случай так называемых слабо плоских границ, в частности, доказать обобщение известной теоремы Геринга–Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между областями квазиэкстремальной длины (см. [6, 7]).

Заметим также, что приведенные теоремы о гомеоморфном продолжении на границу позволяют, в частности, исследовать задачу о существовании регулярных решений проблемы Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, [5]).

1. *Astala K., Iwaniec T., Martin G. J.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane // Princeton Math. Ser. Vol. 48. – Princeton: Princeton Univ. Press, 2009. – 677 p.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
3. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Ukr. Math. Bull. – 2010. – **7**, No 4. – P. 467–515.
4. *Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation // Handbook in Complex Analysis: Geometric function theory. Vol. 2. – Amsterdam: Elsevier, 2005. – P. 555–597.
5. *Dybov Yu.* On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2010. – **55**, No 12. – P. 1099–1116.
6. *Gehring F. W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1985. – **45**. – P. 181–206.
7. *Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V.* On homeomorphisms with finite distortion in the plane // arXiv: 1011.3310v2 [math. CV], 2010. – P. 1–16.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 05.01.2011

D. A. Kovtonyuk, I. V. Petkov, V. I. Ryazanov

On the boundary behavior of regular solutions to the Beltrami equations

We obtained integral conditions on the dilatation quotient of the Beltrami equation guaranteing a homeomorphic extension of general homeomorphic solutions of the class $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *to the boundary in the case of bounded convex domains, as well as bounded domains with smooth boundaries of the class* C^1. *Moreover, the criteria of removability for the isolated singularities of degenerate Beltrami equations are given.*