УДК 517.983



**Ю. С. Лінчук**

# Комутанти операторів композиції, породжених параболічними автоморфізмами одиничного круга

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)*

*Описано комутант оператора композиції, породженого довільним параболічним дробово-лінійним перетворенням одиничного круга на себе, в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторі функцій, аналітичних в одиничному крузі.*

Нехай $G$ — довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначатимемо простір усіх аналітичних в області $G$ функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Якщо $\varphi(z)$ — аналітична в області $G$ функція, для якої $\varphi(G) \subset G$, то формулою $(K_\varphi f)(z) = f(\varphi(z))$ визначається оператор композиції $K_\varphi$, який лінійно та неперервно діє на просторі $\mathcal{H}(G)$.

Починаючи з другої половини XX ст. здійснюється систематичне дослідження властивостей операторів композиції в банахових просторах Харді, Бергмана і Діріхле, які складаються з аналітичних у крузі $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ функцій з певними обмеженнями на їхній модуль. Як відзначали К. Коуен та Б. Макклуер в [1], важливою і актуальною є задача про опис комутанта оператора композиції в таких просторах. Якщо $\psi(z)$ — фіксована функція з відповідного банахового простору аналітичних функцій, для якої $\psi \circ \varphi = \psi$, то оператор множення $Q_\psi$ на функцію $\psi$ є переставним з оператором $K_\varphi$. Б. Клод в [2, 3] досліджував комутант оператора композиції $K_\varphi$ у просторі Харді $H^2$ у випадку, коли функція $\varphi(z)$ є автоморфізмом круга $D$. Він описав оператори множення на аналітичні функції, які переставні з операторами композиції, що породжені еліптичними автоморфізмами одиничного круга. У висновках до [3] автор відзначав, що задача про опис комутанта оператора $K_\varphi$ у просторі $H^2$ для гіперболічного та параболічного автоморфізмів одиничного круга ним не розв'язана. П. Розенталь [4] вважав, що задача знаходження комутанта оператора композиції в загальному випадку в цих просторах є досить складною і не розв'язаною.

Загальний вигляд конформного відображення одиничного круга $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ на себе дається формулою

$$\varphi(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}, \tag{1}$$

де $|z_0| < 1$ і $\alpha \in \mathbb{R}$. Кожне таке відображення породжує оператор композиції $K_\varphi$, який лінійно і неперервно діє в просторі $\mathcal{H}(D)$ за правилом $(K_\varphi f)(z) = (f \circ \varphi)(z)$. Відомо, що залежно від кількості та характеру розміщення нерухомих точок відображення $\varphi(z)$ виду (1), дробово-лінійні автоморфізми одиничного круга розбиваються на три класи: еліптичні, гіперболічні та параболічні [5]. У роботі [6] одержано опис комутанта оператора композиції, породженого довільним еліптичним автоморфізмом одиничного круга. Значно складнішою виявилася задача про опис комутанта оператора композиції, породженого гіперболічним автоморфізмом одиничного круга. Для її розв'язання в [7, 8] використовуються спеціально побудовані характеристичні функції лінійних неперервних операторів.

У цій роботі досліджується проблема опису комутанта оператора композиції, породженого довільним параболічним автоморфізмом одиничного круга. Нагадаємо, що дробово-лінійне перетворення $\varphi(z)$ виду (1) є параболічним тоді і тільки тоді, коли воно має одну нерухому точку, яка лежить на одиничному колі $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. Для того щоб перетворення (1) було параболічним, необхідно і достатньо, щоб $|z_0| = |\sin(\alpha/2)|$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\alpha \in (0, \pi) \bigcup (\pi, 2\pi)$, тоді $|z_0| = \sin(\alpha/2)$. Кожне таке перетворення має одну скінченну нерухому точку $z_1$, причому якщо $z_0 = \sin(\alpha/2)e^{i\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, то $z_1 = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma-\frac{\pi}{2}\right)}$. Перетворення $w = \varphi(z)$ можна подати в канонічному вигляді

$$\frac{1}{w - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + i\overline{z}_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

Наведемо деякі допоміжні твердження.

**Лема 1.** *Нехай* $\varphi(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$, *причому* $\alpha \in (0, \pi) \bigcup (\pi, 2\pi)$ *і* $z_0 = \sin\dfrac{\alpha}{2}e^{i\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, *а* $\widetilde{\varphi}(z) = z + \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. *Тоді оператор* $K_\varphi$ *у просторі* $\mathcal{H}(D)$ *еквівалентний до оператора* $K_{\widetilde{\varphi}}$ *у просторі* $\mathcal{H}(P)$, *де* $P = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$. *При цьому для функції* $\psi(z) = -iz_1\left(\dfrac{1}{z - z_1} + \dfrac{\overline{z}_1}{2}\right)$, *де* $z_1$ *— нерухома точка перетворення* $\varphi(z)$, *виконується рівність*

$$K_\varphi K_\psi = K_\psi K_{\widetilde{\varphi}}. \tag{3}$$

**Лема 2.** *Нехай оператори* $A$ *та* $B$ *лінійно та неперервно діють у просторах* $\mathcal{H}(P)$ *та* $\mathcal{H}(D)$ *відповідно і є еквівалентними між собою, тобто існує ізоморфізм* $T$ *простору* $\mathcal{H}(P)$ *на простір* $\mathcal{H}(D)$, *для якого* $TA = BT$. *Для того щоб лінійний неперервний оператор* $T_2\colon \mathcal{H}(D) \to \mathcal{H}(D)$ *був переставним з оператором* $B$, *необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді* $T_2 = TT_1T^{-1}$, *де* $T_1$ *— деякий лінійний неперервний оператор, що діє в просторі* $\mathcal{H}(P)$ *і комутує з оператором* $A$.

Для числа $h \in \mathbb{R}$ через $E_h$ позначатимемо оператор зсуву, який лінійно та неперервно діє в $\mathcal{H}(P)$ за правилом $(E_h f)(z) = f(z + h)$. Враховуючи леми 1 та 2, одержуємо, що для опису комутанта оператора $K_\varphi$ у просторі $\mathcal{H}(D)$ нам потрібно описати комутант оператора зсуву в просторі $\mathcal{H}(P)$. Для розв'язання цієї задачі використаємо інтегральне зображення Кете [9] лінійних неперервних операторів у просторі $\mathcal{H}(P)$, за яким формулою $t(\lambda, z) = T[1/(\lambda - z)]$ встановлюється взаємно однозначна відповідність між лінійними неперервними операторами $T\colon \mathcal{H}(P) \to \mathcal{H}(P)$ і їхніми характеристичними функціями $t(\lambda, z)$, які є локально аналітичними на множині $\complement P \times P$.

Для додатних чисел $a$ та $b$ через $M_{a,b}$ позначимо прямокутник $M_{a,b} = \{z \in \mathbb{C}\colon -a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant a; 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$. Символом $S$ позначатимемо множину функцій $t_1(\mu, z)$, для кожної з яких існують додатні числа $a$ та $b$ такі, що функція $t_1(\mu, z)$ є аналітичною на множині $\complement M_{a,b} \times P$.

Для довільного натурального $n$ покладемо $P_n = \{z \in \mathbb{C}\colon -n-1 < \operatorname{Re} z < n+1; 1/(n+1) < \operatorname{Im} z < n + 1\}$. Послідовність множин $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ апроксимує область $P$, тобто $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ і $\overline{P_n} \subset P_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

**Теорема 1.** *Нехай* $h$ *— фіксоване дійсне число. Для того щоб оператор* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(P))$ *був переставним з оператором* $E_h$, *необхідно і достатньо, щоб його характеристична функція* $t(\lambda, z)$ *подавалася у вигляді*

$$t(\lambda, z) = t_1(\lambda - z, z), \tag{4}$$

*де $t_1(\mu, z)$ — деяка функція, яка належить множині $S$ і є періодичною за змінною $z$ з періодом $h$. При цьому відповідний оператор $T$ діє на довільну $f \in \mathcal{H}(P)$ при $z \in P_n$ за правилом*

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} t_1(\lambda - z, z) f(\lambda)\, d\lambda,$$

*де $\gamma_n = \partial P_{N(n)+1}$, а $N(n)$ вибирається за означенням локально аналітичної на множині $\complement P \times P$ функції $t_1(\lambda - z, z)$.*

*Зауваження 1.* Твердження теореми 1 буде правильним і в тому випадку, коли оператор зсуву $E_h$ лише діє в просторі $\mathcal{H}(P)$, але не обов'язково є ізоморфізмом, тобто для $h \in \mathbb{C}$ при умові, що $\operatorname{Im} h \geqslant 0$.

*Зауваження 2.* Комутант оператора зсуву в просторі цілих функцій за допомогою диференціальних операторів нескінченного порядку описаний в [10]. В [11] за допомогою характеристичних функцій операторів одержано зображення всіх лінійних неперервних операторів, які діють у просторі цілих функцій і є переставними з лінійними комбінаціями зсувів.

Якщо $\mu_0$ — деяке комплексне число, для якого $\operatorname{Im} \mu_0 > 0$, то функція $t_1(\mu, z) = n!/(\mu - \mu_0)^{n+1}$ для кожного натурального $n$ задовольняє умови теореми для довільного $h \in \mathbb{R}$. Відповідний оператор, який комутує з $E_h$, діє в $\mathcal{H}(P)$ за правилом

$$(T_n f)(z) = f^{(n)}(z + \mu_0).$$

Враховуючи це зауваження, одержуємо, що є правильним таке твердження.

**Наслідок 1.** *Нехай $h \in \mathbb{R}$, $\mu_0 \in \mathbb{C}$, причому $\operatorname{Im} \mu_0 \geqslant 0$, а $(\psi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ — послідовність функцій з простору $\mathcal{H}(P)$, кожна з яких є періодичною з періодом $h$, і для кожної функції $f(z)$ з простору $\mathcal{H}(P)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) f^{(n)}(z + \mu_0)$ збігається за топологією простору $\mathcal{H}(P)$. Тоді формулою*

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) f^{(n)}(z + \mu_0), \tag{5}$$

*визначається оператор $T$ з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(P))$, який є переставним з оператором $E_h$.*

З лем 1, 2 та теореми 1 випливає правильність основного результату цієї роботи.

**Теорема 2.** *Нехай $\varphi(z) = e^{i\alpha} \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$, причому $\alpha \in (0, \pi) \bigcup (\pi, 2\pi)$ і $z_0 = \sin \dfrac{\alpha}{2} e^{i\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Для того щоб оператор $T_1$ з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D))$ був переставним з оператором $K_\varphi$, необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді*

$$T_1 = K_\psi T (K_\psi)^{-1}, \tag{6}$$

*де $T$ — оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(P))$, який переставний з оператором $E_h$ для $h = \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$, а $\psi(z) = -iz_1 \left( \dfrac{1}{z - z_1} + \dfrac{\overline{z}_1}{2} \right)$, $z_1$ — нерухома точка перетворення $\varphi_(z)$.*

Теорема 2 і наслідок 1 дозволяють побудувати досить широкий клас операторів з множини $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D))$, які комутують з оператором композиції, породженим фіксованим параболічним автоморфізмом одиничного круга $D$. Для цього використаємо аналог формули 0.430 з [12] для аналітичних функцій.

Якщо функції $f(z)$ та $\Theta(z)$ є аналітичними в області $G$, причому $\Theta(G) \subset G$, то при $z \in G$ для довільного натурального $n$ є правильною формула

$$\frac{d^n}{dz^n}[f(\Theta(z))] = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k(z)}{k!} f^{(k)}(\Theta(z)), \tag{7}$$

де

$$U_k(z) = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \frac{k(k-1)\cdots(k-m+2)}{(m-1)!} [\Theta(z)]^{m-1} \frac{d^n}{dz^n} [\Theta(z)]^{k+1-m}.$$

Тепер, використовуючи формули (6) та (7), одержуємо, що оператор $T_1$, який відповідає оператору $T$, що визначається формулою (5), діє в $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D))$ за правилом

$$(T_1 f)(z) = \widetilde{\psi}_0(z) f\left(C\frac{z - z_2}{1 - \overline{z_2} z}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\psi}_n(z) \sum_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{U}_k(z)}{k!} f^{(k)}\left(C\frac{z - z_2}{1 - \overline{z_2} z}\right), \tag{8}$$

де

$$\widetilde{U}_k(z) = U_k(\psi(z)), \qquad \Theta(z) = k\frac{z - z_2}{1 - \overline{z_2} z}, \qquad C = \frac{i - \mu_0}{i + \mu_0}, \qquad z_2 = \frac{m_0 z_1}{\mu_0 - i}.$$

Тому є правильним таке твердження.

**Наслідок 2.** *Нехай* $\varphi(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$, *причому* $\alpha \in (0,\pi)\bigcup(\pi, 2\pi)$ *і* $z_0 = \sin\dfrac{\alpha}{2} e^{i\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $z_1$ *— нерухома точка перетворення* $\varphi(z)$, *а* $\mu_0 \in \mathbb{C}$, *причому* $\operatorname{Im}\mu_0 \geqslant 0$, $\mu_0 \neq i$. *Тоді якщо* $(\widetilde{\psi}_n(z))_{n=0}^{\infty}$ *— послідовність функцій з простору* $\mathcal{H}(D)$, *для якої ряд у правій частині формули* (8) *збігається в просторі* $\mathcal{H}(D)$ *для довільної функції* $f(z)$ *з* $\mathcal{H}(D)$ *і* $\widetilde{\psi}_n(\varphi(z)) = \widetilde{\psi}_n(z)$ *при* $z \in D$ *і* $n = 0, 1, \ldots$, *то формулою* (8) *визначається оператор* $T_1$ *з класу* $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D))$, *який є переставним з оператором* $K_{\varphi}$.

Зауважимо, що при $\mu_0 \in \mathbb{R}$ відповідна функція $\Theta(z)$ є автоморфізмом одиничного круга $D$. Якщо ж $\mu_0 \in \mathbb{C}$, причому $\operatorname{Im}\mu_0 > 0$ і $\mu_0 \neq i$, то відповідна функція $\Theta(z)$ відображає $D$ в себе і не є автоморфізмом.


1. *Cowen C. C., MacCluer B. D.* Some problems on composition operators // Contemporary Mathematics. Vol. 213 / Studies on Composition Operators. AMS. – Providence, RI, 1998. – P. 17–26.
2. *Cload B.* Toeplitz operators in the commutant of composition operators // Stud. Math. – 1999. – **133**, No 2. – P. 187–196.
3. *Cload B.* Commutants of composition operators. – Toronto: University of Toronto, 1997. – 45 p.
4. *Rosenthal* P. Book review // Bull. Amer. Math. Soc. – 1995. – **32**, No 1. – P. 150–153.
5. *Форд Л. Р.* Автоморфные функции. – Москва: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 340 с.
6. *Лінчук Ю. С.* Комутант оператора композиції, породженого еліптичним дробово-лінійним перетворенням, та його застосування // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 228. Математика. Зб. наук. праць. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 48–50.
7. *Лінчук Ю. С.* Комутант одного класу операторів композиції в просторах аналітичних функцій // Доп. НАН України. – 2005. – № 11. – С. 14–17.
8. *Linchuk Yu. S.* Representation of commutants for composition operators induced by a hyperbolic linear fractional automorphisms of the unit disk // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, No 4. – P. 361–371.
9. *Kothe G.* Dualitat in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**, No 1–2. – S. 30–49.
10. *Подпорин В. П.* К вопросу о представлении линейных операторов в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 6. – С. 1422–1425.

11. *Лінчук Ю. С.* Комутанти деяких класів операторів, що пов'язані з операторами зсуву // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 859–865.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. – Москва: Физматгиз, 1963. – 1100 с.



*Чернівецький національний університет*
*ім. Юрія Федьковича*



*Надійшло до редакції 28.12.2010*



**Yu. S. Linchuk**


## Commutants of composition operators induced by parabolic automorphisms of a unit disk


*The commutant of a composition operator induced by a parabolic linear fractional transformation of a unit disk onto itself in the class of linear continuous operators, which act in the space of analytic functions, is described.*