УДК 517.984

В. А. Михайлец, В. Н. Молибога

О спектре сингулярных возмущений полупериодических операторов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Досліджено властивості заданих у комплексному сепарабельному гільбертовому просторі $L^2(0,1)$ операторів $(\mathbb{D}_-^2)^s \dot{+} V(x)$, $s \in (1/2, \infty)$, де $\mathbb{D}_-^2 = -d^2/dx^2$ — диференціальний оператор з напівперіодичними граничними умовами, а 1-періодична узагальнена функція $V(x)$ належить негативному простору Соболєва $H_+^{-s\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$. Дано опис якісних спектральних властивостей таких операторів, знайдено многочленні асимптотичні формули для їх власних значень при $s \in (1,\infty)$ як в самоспряженому випадку, так і в несамоспряженому.

В комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$ исследуются сингулярные возмущения самосопряженного положительно определенного оператора

$$\mathbb{D}_-^{2s} := (\mathbb{D}_-^2)^s, \qquad s > 1/2,$$

$$\mathbb{D}_-^2 := -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \mathrm{Dom}(\mathbb{D}_-^2) := \{u \in H^2[0,1] \mid u^{(j)}(0) = -u^{(j)}(1), j = 0,1\},$$

комплекснозначными 1-периодическими распределениями

$$V(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{V}(k) e^{ik2\pi x} \in H_+^{-s}[0,1], \qquad \text{т. е.,} \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{-2s} |\widehat{V}(k)|^2 < \infty.$$

В работе дано корректное определение операторов

$$\mathrm{S}_-(V)u := \mathbb{D}_-^{2s} u + V(x)u, \qquad s > 1/2,$$

и установлены их аппроксимативные и спектральные свойства (локализация и распределение собственных значений, полнота корневых функций).

1. Пространства. Введем необходимые нам определения и обозначения.

Пусть $C_+^\infty \equiv C_{1,+}^\infty([0,1])$ и $\mathfrak{D}'_+ \equiv \mathfrak{D}'_{1,+}([0,1])$ — комплекснозначные пространства *1-периодических* бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций соответственно. Для характеристики гладкости таких распределений введем шкалу гильбертовых пространств Соболева $\{H_+^s\}_{s\in\mathbb{R}}$, которые определяются с помощью коэффициентов Фурье:

$$H_+^s \equiv H_+^s[0,1] := \left\{ f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik2\pi x} \in \mathfrak{D}'_+ \,\middle|\, \|f\|_{H_+^s} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{H_+^s}^2 := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |\widehat{f}(k)|^2, \qquad \widehat{f}(k) = \langle f(x), e^{ik2\pi x}\rangle_+, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Периодическое распределение $f \in \mathfrak{D}'_+$ является вещественнозначным тогда и только тогда, когда

$$\widehat{f}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Шкала пространств Соболева $\{H^s_-\}_{s\in\mathbb{R}}$ *1-полупериодических* функций/распределений вводится аналогичным образом:

$$H^s_- \equiv H^s_-[0,1] := \left\{ g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(k) e^{i(k+1/2)2\pi x} \in \mathfrak{D}'_- \,\middle|\, \|g\|_{H^s_-} < \infty \right\},$$

$$\|g\|^2_{H^s_-} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1 + \left|k + \frac{1}{2}\right|\right)^{2s} |\widehat{g}(k)|^2, \qquad \widehat{g}(k) = \langle g(x), e^{i(k+1/2)2\pi x}\rangle_-, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Понятно, что $H^0_- \equiv H^0_+ \equiv L^2(0,1)$.

Пусть

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik2\pi x} \in \mathfrak{D}'_+, \qquad g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(k) e^{i(k+1/2)2\pi x} \in \mathfrak{D}'_-.$$

Определим произведение $f \cdot g$ 1-периодического и 1-полупериодического распределений. Перемножив *формально* соответствующие ряды Фурье–Шварца, получаем

$$(f\cdot g)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{(f\cdot g)}(k) e^{i(k+1/2)2\pi x}, \tag{1}$$

$$\widehat{(f\cdot g)}(k) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k-j)\widehat{g}(j), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Поэтому произведение корректно определено, если свертка (2) существует и ряд (1) определяет распределение из $\mathfrak{D}'_-$. Следующая известная лемма о свертке [1] дает достаточные условия существования произведения $f \cdot g$ в классе распределений.

Лемма 1. *Пусть s, $r \geqslant 0$ и $t \in \mathbb{R}$, $t \leqslant \min(s,r)$.*

Если $s + r - t > 1/2$, то произведение $f \cdot g$, задаваемое формулами (1), (2), *является непрерывным отображением, действующим в пространствах:*

$$H^s_+ \times H^r_- \to H^t_-, \qquad \|f\cdot g\|_{H^t_-} \leqslant C(s,r,t)\|f\|_{H^s_+}\|g\|_{H^r_-};$$

$$H^{-t}_+ \times H^s_- \to H^{-r}_-, \qquad \|f\cdot g\|_{H^{-r}_-} \leqslant C'(s,r,t)\|f\|_{H^{-t}_+}\|g\|_{H^s_-}.$$

2. Операторы. Приведем строгое определение исследуемых в работе операторов.

Пусть $g \in H^{-s}_-$, $\psi \in H^s_-$, $s \geqslant 0$, тогда определена форма

$$\langle g, \psi\rangle_- := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(k)\overline{\widehat{\psi}(k)},$$

где ряд сходится абсолютно.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$ полуторалинейную форму

$$\tau^-_{2s}[u,v] := \langle \mathbb{D}^{2s}_- u, v\rangle_-, \qquad u, v \in H^s_-, \qquad s > \frac{1}{2}.$$

Она плотно определена и положительна, так как $\mathbb{D}_-^2 \geqslant \pi^2$ в $L^2(0,1)$. Определим теперь полуторалинейную форму, порожденную 1-периодическим распределением $V(x) \in H_+^{-s}$ в пространстве $L^2(0,1)$. В силу равенств (1), (2) и леммы о свертке, произведение $V(x) \cdot u(x)$ корректно определено для произвольной функции $u \in H_-^s$ и $V(x) \cdot u(x) \in H_-^{-s}$. Поэтому периодическое распределение $V(x) \in H_+^{-s}$ порождает в пространстве $L^2(0,1)$ плотно определенную полуторалинейную форму

$$t_V^-[u,v] := \langle V(x)u(x), v(x)\rangle_-, \qquad \mathrm{Dom}(t_V) = H_-^s.$$

Положим

$$t^-[u,v] := \tau_{2s}^-[u,v] + t_V^-[u,v], \qquad \mathrm{Dom}(t) := H_-^s.$$

Поскольку множество C_+^∞ плотно в H_+^{-s}, то каждое распределение $f \in H_+^{-s}$ допускает представление

$$f = f_\varepsilon + g_\varepsilon, \qquad \|f_\varepsilon\|_{H_+^{-s}} \leqslant \varepsilon, \qquad g_\varepsilon \in C_+^\infty,$$

где $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно малым. Используя этот факт и лемму о свертке, можно показать, что верна

Лемма 2. *Полуторалинейная форма t_V^- является 0-ограниченной относительно полуторалинейной формы τ_{2s}^-, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $b_\varepsilon \geqslant 0$, что*

$$|t_V^-[u]| \leqslant \varepsilon\tau_{2s}^-[u] + b_\varepsilon\|u\|_{L^2(0,1)}, \qquad u \in \mathrm{Dom}(\tau_{2s}^-).$$

В силу [2, теорема VI.1.33] полуторалинейная форма t^- является плотно определенной, замкнутой и секториальной. Согласно первой теореме о представлении [2, теорема VI.2.1] с нею ассоциирован *m-секториальный* оператор, который мы и примем за определение возмущенного оператора $\mathrm{S}_-(V)$.

Теорема 1. *Пусть $V(x) \in H_+^{-s}$, $s > 1/2$. Операторы $\mathrm{S}_-(V)$ корректно определены в пространстве $L^2(0,1)$ как форм-суммы $\mathbb{D}_-^{2s} \dotplus V(x)$. При этом*

$$\mathrm{S}_-(V)u = \mathbb{D}_-^{2s}u + V(x)u, \qquad u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S}_-(V)) = \{u \in H_-^s \,\big|\, \mathbb{D}_-^{2s}u + V(x)u \in L^2(0,1)\}.$$

В следующей теореме мы даем условия аппроксимации операторов $\mathrm{S}_-(V)$ с сингулярными коэффициентами операторами $\mathrm{S}_-(V_n)$ того же класса, в частности с гладкими коэффициентами.

Теорема 2. *Пусть $s > 1/2$, $V_n, V \in H_+^{-s}$ и $\|V_n - V\|_{H_+^{-s}} \to 0$. Тогда последовательность операторов $\mathrm{S}_-(V_n)$ сходится к оператору $\mathrm{S}_-(V)$ в смысле равномерной резольвентной сходимости, т. е.*

$$\|\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(V_n)) - \mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(V))\| \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad \lambda \in \rho(\mathrm{S}_-(V)) \neq \varnothing. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 2 опирается на лемму 1 и теорему VI.3.6 из [2].

В частности, соотношение (3) выполняется, если $V_n(x) = \sum\limits_{|k|\leqslant n} \widehat{V}(k)e^{ik2\pi x} \in C_+^\infty$.

Общий подход к исследованию сингулярных возмущений дифференциальных операторов предложен в [3] (см. также библиографию там). Он основывается на теории мультипликаторов.

Описание качественных спектральных свойств операторов $\mathrm{S}_-(V)$ дает

Теорема 3. *Справедливы утверждения:*

(a) для каждого сектора $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg \lambda| \leqslant \varepsilon\}$ *найдется такое* $k \in \mathbb{R}_+$, *что числовой образ оператора* $\mathrm{S}_-(V) + k$ *лежит в этом секторе;*

(b) операторы $\mathrm{S}_-(V)$ *являются самосопряженными тогда и только тогда, когда распределение* $V(x)$ *является вещественнозначным;*

(c) операторы $\mathrm{S}_-(V)$ *имеют чисто дискретный спектр;*

(d) системы корневых векторов операторов $\mathrm{S}_-(V)$ *полны в гильбертовом пространстве* $L^2(0,1)$.

Отметим, что для случая $s \in \mathbb{N}$ приведенные утверждения установлены ранее в [1, 4–6]. Общий случай $s \in (1/2, \infty)$ исследуется сходным образом.

3. Спектры. Пусть $\{\nu_k(V)\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность собственных значений оператора $\mathrm{S}_-(V)$, с учетом их алгебраической кратности, которая упорядочена лексикографически. Собственное значение $\nu_k(V)$ предшествует собственному значению $\nu_{k+1}(V)$, если

$$\operatorname{Re}\nu_k(V) < \operatorname{Re}\nu_{k+1}(V) \qquad \text{или} \qquad \operatorname{Re}\nu_k(V) = \operatorname{Re}\nu_{k+1}(V), \qquad \operatorname{Im}\nu_k(V) \leqslant \operatorname{Im}\nu_{k+1}(V).$$

Локализацию спектра операторов $\mathrm{S}_-(V)$ описывает

Теорема 4. *Пусть* $V(x) \in H^{-s}$, $s > 1$. *Существуют такие числа* $M = M(\|V\|_{H_+^{-s}}) \geqslant 1$ *и* $n_0 = n_0(\|V\|_{H_+^{-s}}) \in \mathbb{N}$, *что:*

(I) в треугольнике

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}\lambda| - M \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \left(\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)^{2s} - \left(n_0 + \frac{1}{2}\right)^{s}\right)(2\pi)^{2s}\right\}$$

находится в точности $2n_0$ *собственных значения оператора* $\mathrm{S}_-(V)$;

(II) при $n \geqslant n_0$ *в диске*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \left|\lambda - \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2s}(2\pi)^{2s}\right| < \left(n + \frac{1}{2}\right)^{s}\right\}$$

находится в точности два собственных значения $\nu_{2n}(V)$, $\nu_{2n+1}(V)$ *оператора* $\mathrm{S}_-(V)$.

Доказательство (набросок). Первым шагом при доказательстве теоремы будет описание резольвентного множества $\operatorname{Resolv}(\mathrm{S}_-(V))$ операторов $\mathrm{S}_-(V)$, а также удобное для работы представление его резольвенты $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(V))$.

Введем множества:

$$\operatorname{Ext}_M := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}\lambda| \geqslant \operatorname{Re}\lambda + M\}, \qquad M \geqslant 1,$$

$$\operatorname{Vert}_n := \left\{\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2s}(2\pi)^{2s} + z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\operatorname{Re} z| \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^{s}(2\pi)^{2s}, |z| \geqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^{s}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Можно показать, что существуют такие числа $M = M(\|V\|_{H_+^{-s}}) \geqslant 1$ и $n_0 = n_0(\|V\|_{H_+^{-s}}) \in \mathbb{N}$, что

$$\mathcal{M}_{M,n_0} := \operatorname{Ext}_M \bigcup \bigcup_{n \geqslant n_0} \operatorname{Vert}_n \subseteq \operatorname{Resolv}(\mathrm{S}_-(V)), \tag{4}$$

и на множестве $\mathcal{M}_{M,n_0}$ резольвента $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(V))$ операторов $\mathrm{S}_-(V)$ допускает представление

$$\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(V)) = \mathrm{U}_\lambda |\lambda - \mathbb{D}_-^{2s}|^{-1/2} (\mathrm{Id} - |\lambda - \mathbb{D}_-^{2s}|^{-1/2} V |\lambda - \mathbb{D}_-^{2s}|^{-1/2} U_\lambda)^{-1} |\lambda - \mathbb{D}_-^{2s}|^{-1/2}. \quad (5)$$

Здесь операторы U_λ и $|\lambda - \mathbb{D}_-^{2s}|^{-1/2}$ определяются из полярного представления

$$(\lambda - \mathbb{D}_-^{2s})^{-1} = \mathrm{U}_\lambda |(\lambda - \mathbb{D}_-^{2s})^{-1}|.$$

Представление (5) полезно, поскольку теперь мы имеем дело только с ограниченными операторами. В частности, таковыми являются операторы

$$A_\lambda \equiv A(\lambda, V(x))\colon = |\lambda - \mathbb{D}_-^{2s}|^{-1/2} V |\lambda - \mathbb{D}_-^{2s}|^{-1/2} \colon L^2(0,1) \to H_-^s \to H_-^{-s} \to L^2(0,1).$$

Из условия

$$\|A(\lambda, V(x))\| < 1 \quad (6)$$

мы получаем включение (4). Для решения неравенства (6) мы используем матричное представление операторов в базисе $\{e^{i(k+1/2)2\pi x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ невозмущенных операторов $\mathbb{D}_-^{2s}$:

$$\mathbb{D}_-^{2s}(k,j) = \langle \mathbb{D}_-^{2s} e^{i(j+1/2)2\pi x}, \qquad e^{i(k+1/2)2\pi x} \rangle = \left(k + \frac{1}{2}\right)^{2s} (2\pi)^{2s} \delta_{kj}, \quad (7)$$

$$(\lambda - \mathbb{D}_-^{2s})(k,j) = \left(\lambda - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{2s} (2\pi)^{2s}\right) \delta_{kj}, \quad (8)$$

$$V(k,j) = \langle V(x) \cdot e^{i(j+1/2)2\pi x}, e^{i(k+1/2)2\pi x} \rangle = \widehat{V}(k-j), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} |(\lambda - \mathbb{D}_-^{2s})|^{-1/2}(k,j) &= \frac{1}{\left|\lambda - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{2s} (2\pi)^{2s}\right|^{1/2}} \delta_{kj}, \\ \mathrm{U}_\lambda(k,j) &= \frac{\left|\lambda - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{2s} (2\pi)^{2s}\right|}{\lambda - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{2s} (2\pi)^{2s}} \delta_{kj}, \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$A_\lambda(k,j) = \frac{\widehat{V}(k-j)}{\left|\lambda - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{2s} (2\pi)^{2s}\right|^{1/2} \left|\lambda - \left(j + \frac{1}{2}\right)^{2s} (2\pi)^{2s}\right|^{1/2}}, \qquad k, j \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Теперь, для локализации собственных значений операторов $\mathrm{S}_-(V)$ нужно заметить, что вместе с (4) также справедливо вложение

$$\mathcal{M}_{M,n_0} \subseteq \mathrm{Resolv}(\mathrm{S}_-(\varepsilon V)), \qquad \varepsilon \in [0,1],$$

поскольку $\|A(\lambda, \varepsilon V(x))\| = \varepsilon \|A(\lambda, V(x))\|$. Тогда для произвольного контура $\Gamma \subset \mathcal{M}_{M,n_0}$ проекторы Рисса

$$P(\varepsilon) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(\varepsilon V))\, d\lambda, \qquad \varepsilon \in [0,1],$$

определены в $L^2(0,1)$ и, как можно показать, используя представление (5), непрерывно зависят от параметра $\varepsilon \in [0,1]$.

Поскольку проекторы $P(\varepsilon_1)$ и $P(\varepsilon_2)$, для которых

$$\|P(\varepsilon_2) - P(\varepsilon_1)\| < 1, \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0,1],$$

имеют изоморфные области значений, то из непрерывности отображения $\varepsilon \to P(\varepsilon)$ мы получаем независимость размерности области значений проекторов $P(\varepsilon)$ от параметра $\varepsilon \in \in [0,1]$ [2, лемма I.4.10].

Таким образом, количество собственных значений невозмущенного оператора $\mathbb{D}_-^{2s}$ и возмущенных операторов $\mathbb{D}_-^{2s}+V(x)$, с учетом их алгебраических кратностей, одинаково внутри произвольного контура $\Gamma \subset \mathcal{M}_{M,n_0}$.

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть проекторы Рисса $P(\varepsilon)$ по контуру треугольника T_{M,n_0} (см. формулировку теоремы), а также по контурам

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\lambda - \left(n+\frac{1}{2}\right)^{2s}(2\pi)^{2s}\right| = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{s}\right\} \subseteq \mathrm{Vert}_n, \qquad n \geqslant n_0,$$

где n_0 выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие (6) при $\lambda \in \mathrm{Vert}_n$.

Для удобства дальнейших формулировок введем обозначения:

$$\nu_n^-(V) := \nu_{2n}(V), \qquad \nu_n^+(V) := \nu_{2n+1}(V), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$h^s := \left\{a = \{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \|a\|_{h^s}^2 := \sum_{k\in\mathbb{N}} (1+|k|)^{2s}|a(k)|^2 < \infty\right\}.$$

Через $h^s(n)$ будем обозначать n-й член последовательности из пространства h^s. Понятно, что если $a = \{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} \in h^s$, то $a(k) = o(|k|^{-s})$, $k \to \infty$.

Основным результатом работы является

Теорема 5. *Пусть $V(x) \in H_+^{-s\alpha}$, $s > 1$, $\alpha \in [0,1]$. Тогда:*

(a) равномерно на ограниченных множествах распределений $V(x) \in H_+^{-s\alpha}$ верны асимптотические оценки:

$$\nu_n^{\pm}(V) = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{2s}(2\pi)^{2s} + \widehat{V}(0) \pm \sqrt{\widehat{V}(-2n)\widehat{V}(2n)} + r_n^{\pm}(V),$$

$$\{r_n^{\pm}(V)\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in \begin{cases} h^{s(1-2\alpha)}, & \text{если} \quad \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ h^{s(1/2-\alpha)}, & \text{если} \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \end{cases}$$

(b) если, кроме того, распределение $V(x)$ вещественнозначно, то

$$\nu_n^{\pm}(V) = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{2s}(2\pi)^{2s} + \widehat{V}(0) \pm |\widehat{V}(2n)| + h^{s(1-2\alpha)}(n).$$

При $s = 1$, $\alpha \in [0,1]$ сходные оценки были установлены ранее в [1, 7] для периодических задач.

Доказательство (набросок). Как и при доказательстве теоремы 4, мы при $n \geqslant n_0$ вводим в рассмотрение проекторы Рисса:

$$P_n^0 := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \mathrm{R}(\lambda, \mathbb{D}_-^{2s})\, d\lambda,$$

$$P_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(V))\, d\lambda, \qquad \Gamma_n := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| \lambda - \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2s} (2\pi)^{2s} \right| = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{s} \right\}.$$

Введем обозначения

$$\tau_n = \frac{\nu_n^- + \nu_n^+}{2}, \qquad \gamma_n := \nu_n^+ - \nu_n^-, \qquad n \geqslant n_0.$$

Тогда

$$\mathrm{Tr}\mathrm{S}_-(V)P_n = 2\tau_n, \qquad \det(\mathrm{S}_-(V) - \tau_n)P_n = -\left(\frac{\gamma_n}{2}\right)^2. \tag{12}$$

Здесь через Tr обозначен след оператора, а через det — его детерминант.

Таким образом, задача сводится к нахождению приемлемых оценок для следа $\mathrm{Tr}\mathrm{S}_-(V)P_n$ и детерминанта $\det(\mathrm{S}_-(V) - \tau_n)P_n$. Это нетривиальная проблема. Для ее решения мы операторы $(\mathrm{S}_-(V) - (n+1/2)^{2s}(2\pi)^{2s})P_n$ и $(\mathrm{S}_-(V) - \tau_n)P_n$ представим через их спектральные интегралы:

$$(\mathrm{S}_-(V) - (n+1/2)^{2s}(2\pi)^{2s})P_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \left(\lambda - \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2s} (2\pi)^{2s} \right) \mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(V))\, d\lambda, \tag{13}$$

$$(\mathrm{S}_-(V) - \tau_n)P_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} (\lambda - \tau_n) \mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(V))\, d\lambda. \tag{14}$$

Ключевыми моментами при вычислении следа интеграла (13), а также детерминанта интеграла (14) являются представление резольвенты $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(V))$ в виде ряда Неймана (см. (5)):

$$\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}_-(V)) = \mathrm{R}(\lambda, \mathbb{D}_-^{2s}) + \mathrm{U}_\lambda |\lambda - \mathbb{D}_-^{2s}|^{-1/2} \left[\sum_{l=1}^{\infty} (A(\lambda, V)\mathrm{U}_\lambda)^l \right] |\lambda - \mathbb{D}_-^{2s}|^{-1/2}, \tag{15}$$

оценки (позволяющие получить хорошие оценки для остатка ряда (15)):

$$\left\| \Big(\sup_{\lambda \in \mathrm{Vert}_n} \|A(\lambda, V)\| \Big)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{h^{s(1-\alpha)}} \leqslant C(\alpha, s) \|V\|_{H_+^{-s\alpha}},$$

а также матричные представления операторов (7)–(11). Используя их, мы можем записать матричные представления спектральных интегралов (13) и (14), после чего можно непосредственно приступать к вычислению следа и детерминанта. При этом мы следуем той же схеме, что и в случае полупериодических операторов, определенных в негативных соболевских пространствах H_-^{-s}, $s \in \mathbb{N}$ (см. [8]).

1. *Михайлецъ В. А., Молибога В. М.* Спектральні задачі на класах періодичних узагальнених функцій. – Київ, 2004. – 46 с. – (Препр. Ін-т математики НАН України; 2004.10).
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1972. – 740 с.
3. *Neiman-zade M., Shkalikov A.* Strongly elliptic operators with singular coefficients // Rus. J. Math. Phys. – 2003. – **13**, No 1. – P. 70–78.
4. *Михайлец В. А., Молибога В. Н.* Возмущение периодических и полупериодических операторов распределением Шварца // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 26–31.
5. *Mikhailets V., Molyboga V.* Singularly perturbed periodic and semiperiodic differential operators // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, No 6. – P. 785–797.
6. *Молибога В.* Повнота системи кореневих векторів деяких несамоспряжених операторів // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 128–144.
7. *Mikhailets V., Molyboga V.* Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Meth. Funct. Anal. Topol. – 2009. – **15**, No 1. – P. 31–40.
8. *Mikhailets V., Molyboga V.* Uniform estimates for the semi-periodic eigenvalues of the singular differential operators // Ibid. – 2004. – **10**, No 4. – P. 30–57.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 14.02.2011

V. A. Mikhailets, V. M. Molyboga

On a spectrum of singular perturbations of the semiperiodic operators

We investigate properties of the operators $(\mathbb{D}_-^2)^s \dotplus V(x)$, $s \in (1/2, \infty)$, *given in the complex separable Hilbert space* $L^2(0,1)$, *where* $\mathbb{D}_-^2 = -d^2/dx^2$ *is a differential operator subject to semiperiodic boundary conditions, and the 1-periodic distribution* $V(x)$ *is in the negative Sobolev space* $H_+^{-s\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$. *We describe qualitative spectral properties of the operators and find polynomial asymptotic formulae for their eigenvalues for* $s \in (1, \infty)$ *in a self-adjoint case and in a non-self-adjoint one.*