УДК 517.9

Т. Б. Шкляр

Про структуру глобальних атракторів неавтономних систем без єдиності

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Для многозначних процесів одержано теореми про структуру глобальних атракторів у термінах повних траєкторій, які застосовано до неавтономного еволюційного включення субдиференціального типу.

В останні роки у зв'язку з численними застосуваннями було розвинуто ряд підходів до опису довгострокової поведінки еволюційних систем, динаміка яких не визначається однозначно початковими даними. Відповідні результати для автономних задач містяться в [1–3], для неавтономних — в [4–7]. Основним об'єктом вивчення при цьому є глобальний атрактор — компактна підмножина фазового простору, що притягує всі траєкторії системи. Результати про існування та топологічні властивості глобальних атракторів многозначних процесів (МП) містяться в [5–7]. В однозначному випадку в [4] досліджено структуру глобальних атракторів неавтономних динамічних систем у термінах повних обмежених траєкторій. Для одного спеціального класу МП структуру атракторів описано в [7]. У даній роботі досліджується структура атракторів для загальних многозначних динамічних процесів, що породжуються, зокрема, неавтономними евоюційними включеннями субдиференціального типу.

Постановка задачі. Нехай (X,ρ) — метричний простір, $\mathbb{R}_d = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 | t \geqslant \tau\}$, $P(X)$ — сукупність усіх непорожніх підмножин X, $\beta(X)$ — сукупність усіх непорожніх, обмежених підмножин X, Σ — деякий метричний простір, на якому задано многозначний напівпотік (m-напівпотік) $\{T(h)\colon \Sigma \mapsto P(\Sigma)\}_{h\geqslant 0}$, тобто $\forall\, \sigma \in \Sigma$ $T(0)\sigma = \sigma$ і $\forall\, h_1,\, h_2 \geqslant 0$ $T(h_1+h_2)\sigma \subseteq T(h_1)T(h_2)\sigma$.

Означення 1. Будемо казати, що задано сім'ю МП $\{U_\sigma : \mathbb{R}_d \times X \mapsto P(X)\}_{\sigma\in\Sigma}$, якщо $\forall\, \sigma \in \Sigma$ виконані умови:

1) $U_\sigma(\tau,\tau,x) = x$ $\forall\, x \in X$, $\forall\, \tau \in \mathbb{R}$;

2) $U_\sigma(t,\tau,x) \subseteq U_\sigma(t,s,U_\sigma(s,\tau,x))$, $\forall\, t \geqslant s \geqslant \tau$ $\forall\, x \in X$;

3) $U_\sigma(t+h,\tau+h,x) \subseteq U_{T(h)\sigma}(t,\tau,x)$ $\forall\, t \geqslant \tau$ $\forall\, h \geqslant 0$,

де для $A \subset X$, $B \subset \Sigma$ $U_B(t,s,A) = \bigcup\limits_{\sigma\in B}\bigcup\limits_{x\in A} U_\sigma(t,s,x)$.

Означення 2. Компактна множина $\Theta_\Sigma \subset X$ називається глобальним атрактором сім'ї МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, якщо:

1) Θ_Σ є рівномірно притягуючою множиною, тобто $\forall\, \tau \in \mathbb{R}$, $\forall\, B \in \beta(X)$

$$\operatorname{dist}(U_\Sigma(t,\tau,B),\Theta_\Sigma) \to 0, \qquad t \to +\infty; \tag{1}$$

2) Θ_Σ — мінімальна в класі замкнених рівномірно притягуючих множин.

Теорема 1 [6, 7]. *Нехай сім'я МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ задовольняє умови:*

1) $\forall\, h \geqslant 0$ $T(h)\Sigma = \Sigma$ і в умові 3 означення 1 має місце рівність;

2) $\exists\, B_0 \in \beta(X)$ $\forall\, B \in \beta(X)$ $\exists\, T = T(B)$ $\forall\, t \geqslant T$ $U_\Sigma(t,0,B) \subset B_0$;

3) $\forall\, B \in \beta(X)$ $\forall\, t_n \to +\infty$ $\forall\, \xi_n \in U_\Sigma(t_n,0,B)$ є передкомпактною в X.

Тоді існує Θ_Σ — глобальний атрактор МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, причому

$$\Theta_\Sigma = \omega_\Sigma(B_0) = \bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s} U_\Sigma(t,0,B_0)}. \tag{2}$$

В однозначному випадку відомо [4], що одержаний в теоремі глобальний атрактор складається з обмежених повних траєкторій процесів $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$. Мета даної роботи — одержати відповідну формулу для МП.

Основні результати.

Означення 3. Відображення $\varphi : \mathbb{R} \mapsto X$ називається повною траєкторією МП U_σ, якщо для будь-яких $\forall\, t \geqslant s$

$$\varphi(t) \in U_\sigma(t,s,\varphi(s)). \tag{3}$$

Нехай для довільних $\sigma\in\Sigma$ та $\tau\in\mathbb{R}$ задано K_σ^τ — множину відображень $\varphi\colon [\tau,+\infty)\mapsto X$ таких, що:

a) $\forall\, x\in X\ \exists\,\varphi(\cdot)\in K_\sigma^\tau$ таке, що $\varphi(\tau)=x$;

b) $\forall\,\varphi(\cdot)\in K_\sigma^\tau\ \forall\, s\geqslant\tau\ \varphi(\cdot)|_{[s,+\infty)}\in K_\sigma^s$;

c) $\forall\, h\geqslant 0\ \forall\,\varphi(\cdot)\in K_\sigma^{\tau+h}\ \varphi(\cdot+h)\in K^\tau_{T(h)\sigma}$.

Покладемо

$$U_\sigma(t,\tau,x) = \{\varphi(t)\mid \varphi(\cdot)\in K_\sigma^\tau, \varphi(\tau)=x\}. \tag{4}$$

Тоді $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ задовольняє умови 1–3 означення 1, причому для $\varphi(\cdot)\in K_\sigma^\tau$

$$\forall\, t\geqslant s\geqslant\tau \quad \varphi(t)\in U_\sigma(t,s,\varphi(s)). \tag{5}$$

З (5) одразу маємо, що якщо для відображення $\varphi(\cdot)\colon\mathbb{R}\mapsto X$ для будь-якого $\tau\in\mathbb{R}$ виконується $\varphi(\cdot)|_{[\tau,+\infty)}\in K_\sigma^\tau$, то $\varphi(\cdot)$ — повна траєкторія $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$.

Теорема 2. *Нехай Σ — компакт, m — напівпотік $T(h)\colon\Sigma\mapsto P(\Sigma)$ та сім'я МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, що задається формулою (4), задовольняють умови теореми 1 і для довільних $\sigma_n\to\sigma_0$, $x_n\to x_0$ виконується така умова:*

$$\text{якщо}\quad \varphi_n(\cdot)\in K^0_{\sigma_n},\quad \varphi_n(0)=x_n,\quad \text{то існує}\quad \varphi(\cdot)\in K^0_{\sigma_0},\quad \varphi(0)=x_0$$
$$\text{таке, що по підпослідовності}\quad \forall\, t\geqslant 0\quad \varphi_n(t)\to\varphi(t).$$

Тоді для глобального атрактора Θ_Σ справедлива формула

$$\Theta_\Sigma = \bigcup_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{K}_\sigma(0), \tag{6}$$

де $\mathcal{K}_\sigma$ — множина повних обмежених траєкторій МП U_σ.

Доведення. Покажемо, що $\mathcal{K}_\sigma(0)\subset\Theta_\Sigma$. Якщо $z\in\mathcal{K}_\sigma(0)$, то існує $\varphi(\cdot)$ — обмежена траєкторія U_σ така, що $\varphi(0)=z$.

Позначимо $\Gamma=\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t)\in\beta(X)$. Тоді для $z=\varphi(0)$ виконується

$$\varphi(0)\in U_\sigma(0,-n,\varphi(-n))\subset U_{T(n)\sigma_n}(0,-n,\varphi(-n))\subset U_\Sigma(n,0,\Gamma).$$

Оскільки $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0\ U_\Sigma(n,0,\Gamma) \subset O_\varepsilon(\Theta_\Sigma)$, то $z \in \Theta_\Sigma$ і шукане вкладення доведене. Тепер нехай $z \in \Theta_\Sigma = \omega_\Sigma(B_0)$. Тоді $z = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n$, $\xi_n \in U_\Sigma(t_n,0,B_0)$. Отже, по підпослідовності

$$z = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t_n), \qquad \varphi_n(\cdot) \in K^0_{\sigma_n}, \qquad \varphi_n(0) \in B_0, \qquad \sigma_n \to \sigma.$$

Для $\forall n \geqslant 1$ розглянемо

$$\psi_n(\cdot) := \varphi_n(\cdot + t_n) \in K^{-t_n}_{T(t_n)\sigma_n},$$

тобто $\psi_n(\cdot) \in K^{-t_n}_{\widetilde{\sigma_n}}$, де $\widetilde{\sigma_n} \in T(t_n)\sigma_n$. Тоді $\psi_n(\cdot) \in K^0_{\widetilde{\sigma_n}}$, $\widetilde{\sigma_n} \to \widetilde{\sigma}$, $\psi_n(0) = \varphi_n(t_n) \to z$, отже, існує $\psi^{(0)}(\cdot) \in K^0_{\widetilde{\sigma}}$, $\psi^{(0)}(0) = z$, $\forall t \geqslant 0$

$$\psi_n(t) = \varphi_n(t + t_n) \to \psi^{(0)}(t).$$

Для $\tau = -1\ \forall n \geqslant n_1\ -t_n < -1$, отже, $\psi_n(\cdot) \in K^{-1}_{\widetilde{\sigma_n}}$ і по підпослідовності $\psi_n(-1) = \varphi_n(t_n - -1) \to z_1$. При цьому існує $\psi^{(-1)}(\cdot) \in K^{-1}_{\widetilde{\sigma}}$ така, що по підпослідовності

$$\psi_n(t) = \varphi_n(t + t_n) \to \psi^{(-1)}(t) \qquad \forall t \geqslant -1,$$

зокрема, $\forall t \geqslant 0\ \psi^{(0)}(t) = \psi^{(-1)}(t)$. Діагональною процедурою будуємо послідовність функцій

$$\psi^{(-k)}(\cdot) \in K^{-k}_{\widetilde{\sigma}}, \qquad k \geqslant 0,$$

причому $\psi^{(-k+1)}(t) = \psi^{(-k)}(t)\ \forall t \geqslant -k+1$. Покладемо $\forall t \geqslant 0\ \psi(t) := \psi^{(-k)}(t)$, якщо $t \geqslant -k$. Тоді функція $\psi(\cdot)$ задана коректно, $\psi\colon \mathbb{R} \mapsto X$.

Крім того, $\forall \tau < 0\ \exists k$ таке, що $[\tau, +\infty) \subset [-k, +\infty)$, на $[-k, +\infty)$ $\psi(\cdot) \equiv \psi^{(-k)}$, отже, $\psi(\cdot) \in K^{-k}_{\widetilde{\sigma}}$, звідси $\psi(\cdot) \in K^{\tau}_{\widetilde{\sigma}}$, $\psi(0) = \psi^{(0)}(0) = z$. Оскільки по підпослідовності $\forall t \in \mathbb{R}$ $\psi(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(t + t_n) \in \omega_\Sigma(B_0) \in \beta(X)$, то $z = \psi(0) \in \mathcal{K}_{\widetilde{\sigma}}$. Теорему доведено.

Як приклад застосування одержаних результатів розглянемо еволюційне неавтономне включення. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — обмежена область, $X = L^2(\Omega)$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ — норма і скалярний добуток в X, $C_v(X)$ — сукупність усіх непорожніх замкнених обмежених опуклих підмножин X. Розглядаємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + F(t,y) + h(t), \quad t > \tau, \\ y(\tau) = y_\tau, \end{cases} \tag{7}$$

де $\varphi\colon X \mapsto (-\infty, +\infty]$ — власна опукла напівнеперервна знизу (н. н. зн.) функція, $\partial\varphi$ — її субдиференціал, $\overline{D(\varphi)} = X$, для довільного $R > 0$ множина $\{\|u\| \leqslant R, \varphi(u) \leqslant R\}$ — компакт, $F\colon \mathbb{R} \times X \mapsto C_v(X)$ — многозначне відображення типу Немицького, тобто існує $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto C_v(\mathbb{R})$ таке, що

$$\forall y \in L^2\ (\Omega) F(t,y) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u(x) \in f(t, y(x)) \text{ для м.в. } x \in \Omega\}. \tag{8}$$

Нехай $h \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; X)$ і виконані умови:

1) $\forall t \in \mathbb{R}$ відображення $f(t,\cdot)\colon \mathbb{R} \mapsto C_v(\mathbb{R})$ є н. н. зверху (н. н. зв.);

2) $\exists C_1, C_2 \geqslant 0\ \forall t, u \in \mathbb{R}\ |f(t,u)| \leqslant C_1 + C_2|u|$;

3) $\forall t,\ s \in \mathbb{R}\ \forall r > 0\ \rho_r(f(t), f(s)) := \operatorname*{dist}_H(\operatorname{graph}|_r f(t), \operatorname{graph}|_r f(s)) \leqslant \gamma(|t-s|, r)$, де $\gamma(p,r) \to 0$, $p \to 0+$, $\operatorname*{dist}_H$ — метрика Хаусдорфа, $\operatorname{graph}|_r f = \bigcup\limits_{|u|\leqslant r} \{(u,w) \mid w \in f(u)\}$.

Тоді для довільних $\tau \in \mathbb{R}$, $y_\tau \in X$ існує принаймні один сильний розв'язок $y \in C([\tau,+\infty); X)$ задачі (7). Розглянемо метричний простір

$$M = \{\psi\colon \mathbb{R} \mapsto C_v(\mathbb{R}) \mid \psi \text{ — н. н. зв.}, |\psi(u)| \leqslant C_1 + C_2|u|\}$$

зі збіжністю, що породжується набором $\{\rho_r\}_{r\geqslant 1}$. Покладемо

$$\Sigma = \operatorname{cl}_{C(\mathbb{R};M)\times L^{2,w}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};X)}\{(f(t+\cdot), h(t+\cdot) \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{9}$$

де $L^{2,w}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};X)$ — простір $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};X)$ з топологією локальної слабкої збіжності. Для кожного $\sigma = (f_\sigma, h_\sigma) \in \Sigma$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + F_\sigma(t,y) + h_\sigma(t), \quad t > \tau, \\ y(\tau) = y_\tau, \end{cases} \tag{10}$$

де відображення F_σ побудоване по f_σ згідно з формулою (8). Покладемо

$$U_\sigma(t,\tau,y_\tau) = \{y(t) \mid y(\cdot) \text{ — розв'язок (10)}\}. \tag{11}$$

Теорема 3. *Нехай функція f задовольняє умови* 1–3, *функція h задовольняє умову $\|h\|_+^2 := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \|h(s)\|^2 ds < \infty$, і виконується умова дисипативності*

$$\exists\,\delta > 0, M > 0 \text{ такі, що } \forall\, u \in D(\partial\varphi), |u| > M, \forall\, t \in \mathbb{R}$$

$$\forall\, y \in -\partial\varphi(u) + F(t,u) + h(t) (y,u) \leqslant -\delta.$$

Тоді формули (9), (11) *визначають сім'ю МП $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, що має у фазовому просторі $X = L^2(\Omega)$ інваріантний, зв'язний, стійкий глобальний атрактор Θ_Σ, для якого справедлива структурна формула* (6).

1. *Мельник В. С.* Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем. – Киев, 1994. – 41 с. – (Препр. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України; № 94-17).
2. *Ball J. M.* Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier–Stokes equations // J. Nonlinear Science. – 1997. – **7**, No 5. – P. 475–502.
3. *Kapustyan O. V., Mel'nik V. S., Valero J., Yasinsky V. V.* Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. – Kyiv: Nauk. Dumka, 2008. – 215 p.
4. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. – Providence: AMS, 2002. – 360 p.
5. *Капустян О. В.* Атрактори многозначних напівпроцесів та їх залежність від параметра // Доп. НАН України. – 2002. – № 6. – С. 20–23.
6. *Капустян О. В., Шкляр Т. Б.* Якісна поведінка розв'язків неавтономного параболічного включення з трансляційно-компактною правою частиною // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. мат., мех. – 2009. – Вип. 22. – С. 17–20.

7. *Wang Y., Zhou S.* Kernel sections and uniform attactors of multi-valued semiprocesses // J. Different. Equat. – 2007. – **232**. – P. 573–622.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 17.03.2011

T. B. Shkliar

About the structure of global attractors of nonautonomous systems without uniqueness

Theorems of the structure of global attractors in the terms of complete trajectories for multivalued processes are obtained, which were applied to a nonautonomous evolution inclusion of the subdifferential type.