

Н. П. Семенюк, Н. Б. Жукова, Н. И. Иванова

## О расчете закритического поведения цилиндрических гофрированных оболочек при внешнем давлении

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Запропоновано методичку розрахунку стійкості та закритичної поведінки довгих гофрованих незамкнених оболонок на основі кубічного варіанту нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка. За допомогою принципу можливих переміщень отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь, для лінеаризації якої застосовується модифікований метод послідовних навантажень. Розв'язок крайової задачі одержано з використанням методу дискретної ортогоналізації. Наведено приклади чисельних розрахунків.

В настоящее время разработаны несколько вариантов нелинейной теории оболочек, применяемых для решения различных задач [1]. Установлено, что критические нагрузки с удовлетворительной точностью определяются на основании простейшего квадратичного варианта [2–4]. Однако при расчете деформирования оболочек в закритической области может проявиться существенная погрешность из-за недостаточной точности используемых зависимостей нелинейной теории [3–8]. В данной работе предлагается решение нелинейной задачи о деформировании продольно гофрированных длинных цилиндрических незамкнутых оболочек при внешнем давлении на основании нелинейной теории более высокого, чем обычно принято, порядка точности.

**Основные соотношения кубического варианта нелинейной теории оболочек типа Тимошенка.** У оболочки бесконечной длины с произвольной цилиндрической поверхностью приведения при не зависящих от длины механических характеристиках и нагрузке каждое поперечное сечение находится в одинаковых условиях, вследствие чего напряжения и перемещения не зависят от координаты  $x$ , совпадающей с образующей рассматриваемой поверхности. Используя полярную систему координат  $R, \varphi$ , представим направляющую оболочки (рис. 1) в виде функции

$$R(\varphi) = R_0 \rho(\varphi), \quad (1)$$

где  $R_0$  — радиус исходной окружности;  $\rho(\varphi)$  — периодическая функция, описывающая профиль волн рассматриваемой оболочки. Геометрические характеристики кривой — параметр

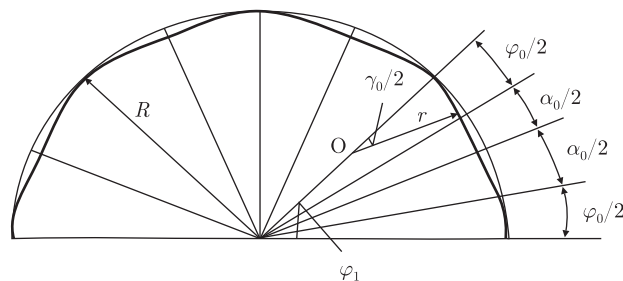


Рис. 1

Ламе  $A_2$  и кривизна  $1/R_2$  — определяются по известным формулам дифференциальной геометрии.

Для исследования нелинейной деформации и устойчивости оболочки воспользуемся вариантом теории оболочек, предложенном в [3, 4]. При решении задачи будем пользоваться соотношениями и уравнениями в безразмерном виде, для чего введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{vR_0}{t^2}; & \bar{w} &= \frac{w}{t}; & h &= \frac{t}{R_0}; & t_{22} &= \frac{T_{22} R_0^2}{C_{22} t^2}; & t_{23} &= \frac{T_{23} R^2}{C_{22} t^2}; \\ m_{22} &= \frac{M_{22} R_0^2}{C_{22} t^3}; & \bar{\varepsilon}_{22} &= \varepsilon_{22} \frac{R_0^2}{t^2}; & \bar{\varepsilon}_{23} &= \varepsilon_{23} \frac{R_0}{t}; \\ \kappa_{22} &= \frac{R_0^2}{t} \kappa_{22}; & \alpha_{44} &= \frac{D_{22}}{C_{22} t^2}; & \alpha_{77} &= \frac{C_{44} R_0}{C_{22} t}; & m_q &= \frac{q R_0^3}{C_{22} t^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как рассматривается плоская деформация цилиндра, то учитываются только перемещения  $v$  и  $w$ , деформации  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$ ,  $\varepsilon_{23}$  и приращения кривизны  $\kappa_{22}$ , которые для данного случая в безразмерном виде [3, 4] запишутся как

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(h^2 \varepsilon_2 + \theta_2^2); & \varepsilon_{23} &= \psi \left[ 1 + h^2 \left( \varepsilon_2 - \frac{1}{2} \psi \theta_2 \right) \right] + \theta_2; \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{a_2} \frac{d\psi}{d\varphi} [1 + h^2(\varepsilon_2 - \psi \theta_2)] + h_2 \left( \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \psi^2 \right) (1 + h^2 \varepsilon_2) + h_2 \theta_2 (\psi + \theta_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{a_2} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{\rho_2}{h} w; & \theta_2 &= \frac{1}{a_2} \frac{dw}{d\varphi} + h_2 v, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a_2 = A_2/R_0$ ,  $\rho_2 = R_0/R_2$ ,  $h_2 = t/R_2$ .

Соотношения упругости запишем для случая симметричного строения оболочки по толщине

$$t_{22} = \varepsilon_{22}; \quad t_{23} = \alpha_{77} \varepsilon_{23}; \quad m_{22} = \alpha_{44} \kappa_{22}. \quad (4)$$

Нелинейные уравнения равновесия получим из принципа возможных перемещений. В рассматриваемом случае он может быть представлен уравнением

$$\int_0^{\varphi_N} (t_{22} \delta \varepsilon_{22} + m_{22} \delta \kappa_{22} + t_{23} \delta \varepsilon_{23}) d\varphi - \frac{1}{h} m_q \int_0^{\varphi_N} [(1 + h^2 \varepsilon_2) \delta w - h^2 \theta_2 \delta v] d\varphi = 0, \quad (5)$$

записанным для криволинейного стержня единичной ширины, на который действует давление интенсивностью  $q$ . Давление направлено к центру кривизны как исходной, так и деформированной поверхности. Из (5) с учетом (3) следуют три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{dt_{22}^*}{d\varphi} - a_2 \rho_2 t_{23}^* - h a_2 m_q \theta_2 &= 0; \\ \frac{dt_{23}^*}{d\varphi} + a_2 \rho_2 t_{22}^* + a_2 m_q (1 + h^2 \varepsilon_2) &= 0; \\ \frac{dm_{22}^*}{d\varphi} - \bar{t}_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

и граничные условия относительно усилий  $t_{22}^*$ ,  $t_{23}^*$  и момента  $m_{22}^*$ . Здесь  $t_{22}^*$ ,  $t_{23}^*$ ,  $m_{22}^*$  — проекции усилий и моментов на направления осей до деформации, которые действуют на элемент деформированного стержня.

Совокупность соотношений (4) с учетом выражений  $\varepsilon_2$  и  $\theta_2$  через перемещения (3) и уравнений (6) с граничными условиями при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_N$  относительно трех разрешающих функций достаточна для исследования напряженно-деформированного состояния замкнутых или открытых длинных цилиндрических оболочек с произвольной формой поперечного сечения на траектории нагружения при малых и немалых перемещениях и углах поворота.

Для малых углов поворота уравнения существенно упрощаются, так как поправкой, вносимой учетом нелинейных слагаемых в выражения деформаций поперечного сдвига  $\varepsilon_{23}$  и кривизны  $\kappa_{22}$ , предполагается возможным пренебречь.

**Разрешающая система уравнений.** Для решения задачи введем разрешающие функции

$$y_1 = t_{22}^*; \quad y_2 = t_{23}^*; \quad y_3 = m_{22}^*; \quad y_4 = v; \quad y_5 = w; \quad y_6 = \psi. \quad (7)$$

Запишем выражения для функций  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ , используя обозначения

$$\begin{aligned} q_1 &= h^2\psi; & q_2 &= -\frac{1}{2}h^2\psi^2; & P_1 &= h^2(\varepsilon_2 - \psi\theta_2); \\ P_2 &= h^2\left(\frac{1}{a_2}\frac{d\psi}{d\varphi} + 2h_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}h_2\psi^2\right); & P_3 &= h_2(\psi + \theta_2) - h^2\psi\kappa_2; \\ P_4 &= h_2(\psi + \theta_2) + h^2(h_2\psi\varepsilon_2 - \theta_2\kappa_2) = P_3 + h^2[h_2\psi\varepsilon_2 + (\psi - \theta_2)\kappa_2]; \\ \kappa_2 &= \frac{1}{a_2}\frac{d\psi}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Получим

$$\begin{aligned} y_1 &= t_{22}(1 + h^2\varepsilon_2) + h\psi t_{23} + (h^2 + P_2)m_{22}; \\ y_2 &= ht_{22}\theta_2 + t_{23}(1 + q_2) + h(h_2\theta_2 + P_3)m_{22}; \\ y_3 &= m_{22}(1 + P_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Необходимо также иметь выражение

$$\bar{t}_{23} = y_2 + t_{23}(P_1 - q_2) - h(t_{22} + h_2m_{22})\theta_2 + h^3m_{22}[h_2\psi\varepsilon_2 + (\psi - \theta_2)\kappa_2]. \quad (10)$$

Соотношения упругости запишем в таком виде:

$$\begin{aligned} t_{22} - \varepsilon_2 - \frac{1}{2}(h^2\varepsilon_2^2 + \theta_2^2) &= 0; \\ \frac{t_{23}}{\alpha_{22}} - \psi - \theta_2 - h^2\psi\left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\psi\theta_2\right) &= 0; \\ \frac{m_{22}}{\alpha_{44}} - \kappa_2(1 + h^2\varepsilon_2 - h^2\psi\theta_2) - h_2\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\psi^2\right)(1 + h^2\varepsilon_2) - h_2\theta_2(\psi + \theta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Функции (7) и нагрузку  $m_q$  зададим в параметрической форме

$$y_i = y_i(\lambda), \quad m_q = m_q(\lambda), \quad (12)$$

где  $\lambda$  — параметр, который удовлетворяет условию [6]

$$\sum_i^6 \left( \frac{dy_i}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{dm_q}{d\lambda} \right)^2 = 1. \quad (13)$$

Заданный в таком виде, он определяет длину кривой, описываемой в 7-мерном пространстве уравнениями (12). Продифференцируем по  $\lambda$  соотношения (6), (9) и (11). Получим систему уравнений, совпадающую с уравнениями для приращений метода последовательных нагружений [6, 8]. Домножим каждое из этих уравнений на  $d\lambda$  и заменим дифференциалы функций конечными приращениями, а приращение нагрузки запишем в виде  $\Delta m_q = \dot{m}_q \Delta \lambda$ . Задавая  $\Delta \lambda$ , будем на каждом шаге нагружения находить неизвестный коэффициент  $\dot{m}_q$ .

Процедура решения задачи методом последовательных нагружений с неизвестной скоростью нагружения изложена в работах [6, 8]. Ниже применим разработанную численную методику для расчета нелинейного деформирования сжимаемых поверхностным давлением гофрированных цилиндрических панелей, изготовленных из волокнистых композитов. Предварительно получим аналитическое решение задачи об устойчивости при внешнем давлении цилиндрических панелей из материалов с пониженной сдвиговой жесткостью. Для этого воспользуемся методикой решения, приведенной в [3]. Однако в отличие от [3], где рассматривалась замкнутая оболочка, в данном случае в точках закрепления, кроме условия  $w = 0$ , необходимо удовлетворить условие  $v = 0$ . В этом случае решение будет иметь вид

$$w = C_1 \sin k\varphi; \quad v = C_2(1 - \cos k\varphi), \quad (14)$$

где  $k = 2\pi/\varphi_N$ , а критическая нагрузка будет равна

$$m_q = \alpha_{44} \left( \frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right) p, \quad p = \frac{1}{1 + 4h \frac{\pi^2}{\varphi_N^2} \frac{\alpha_{44}}{\alpha_{77}}}. \quad (15)$$

При  $\varphi_N = \pi$  критические нагрузки для панели и замкнутой оболочки совпадают [9]. Такое же совпадение имеет место в классическом решении [10].

Формулу (15) будем использовать для оценки значений критических нагрузок, получаемых численным методом.

**Расчет и анализ результатов.** Рассмотрим устойчивость и закритическое поведение оболочки, направляющая цилиндрической поверхности которой представляет собой волнообразную кривую, состоящую из дуг окружностей, соединенных отрезками прямой. Вид поперечного сечения такой оболочки изображен на рис. 1 при  $N = 4$ , где  $N$  — это количество волн, которые укладываются в пределах дуги, определяемой центральным углом  $\varphi_N$ .

При проведении расчетов обратим внимание, во-первых, на различие в критических нагрузках и характере закритического поведения однотипных оболочек, устанавливаемое с помощью кубического варианта нелинейной теории типа Тимошенко и известного простейшего квадратичного. Второй, не менее важный вопрос, который можно выяснить с помощью

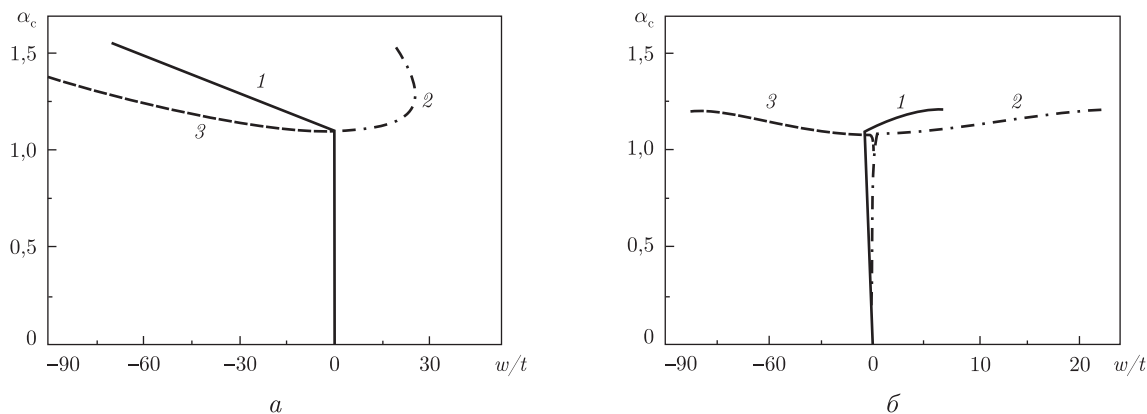


Рис. 2

разработанного алгоритма, заключается в том, как зависит от пониженной сдвиговой жесткости материала характер закритического поведения рассматриваемых оболочек. Ранее в работе [3] было проведено исследование начального закритического поведения замкнутых круговых цилиндрических оболочек из композитов. Гофрированные оболочки могут иметь различные геометрические параметры, которых значительно больше, чем у круговых. Некоторые особенности докритического и закритического деформирования гофрированных оболочек рассмотрим на примерах расчета.

Во всех примерах механические характеристики компонентов волокнистого композита, из которого изготовлены оболочки, предполагались соответствующими средним значениям для углеродных нанотрубок ( $E_a = 1,14$  ГПа,  $\nu_a = 0,2$ ) и эпоксидно-малеиновой композиции ( $E = 3,15$  ГПа,  $\nu_a = 0,382$ ) при объемном содержании наполнителя  $\xi = 0,7$ . Безразмерные параметры  $\alpha_{22} = 1$ ,  $\alpha_{44} = 0,08333$ ,  $\alpha_{77} = 0,80586$ . Коэффициент  $p$ , с помощью которого в формуле (15) учитывается снижение критического давления за счет деформаций поперечного сдвига, в данном случае мало отличается от единицы ( $p = 0,996$ ). Для оболочки толщиной  $t = 0,1$  м жесткость  $C_{22}$  увеличивается на порядок, коэффициент  $\alpha_{77}$  уменьшается в таком же отношении, коэффициент  $\alpha_{44}$  остается неизменным, а  $p = 0,7074$ . Для данного композита отношение  $E_2/G_{23} = 120$ , в то время как для боропластика —  $E_2/G_{23} = 30$ , для стеклопластика —  $E_2/G_{23} = 10$ . Здесь учитывается, что направление волокон совпадает с направляющей цилиндрической оболочки. Из этих данных следует, что влияние пониженной сдвиговой жесткости на устойчивость конструкций из композитов будет наиболее существенным для нанокompозитов. На рис. 2, а приведены равновесные кривые для оболочек с  $h = 0,01$ ,  $N = 4$ ,  $\varphi_N = \pi$ , вычисленные с использованием упрощенного варианта теории типа Тимошенко. На оси абсцисс отложены значения отношения  $w/t$ , на оси ординат — отношения вычисляемого значения критической нагрузки  $m_q$  для рассматриваемой оболочки к критическому значению для тонкого кольца  $m_{q,c} = 3\alpha_{44}$ . Если использовать аналитическое решение (15), то

$$\alpha_c = \frac{m_q}{m_{q,c}} = \frac{1}{3} \left( \frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right) p.$$

Отсюда следует, что  $m_q/m_{q,c} = p$  при  $\varphi_N = \pi$ . Расчет, согласно методике [9, 14], дает  $\alpha_c^{(1)} = 1,096$  при  $p = 0,996$ . Кривые 1, 2, 3 на рис. 2, а описывают характер перемещения  $w$  в точках сечения  $\varphi = \pi/2, \pi/4, 3\pi/4$ . Точка  $\alpha_c = 1,096$  в данном случае не является пре-

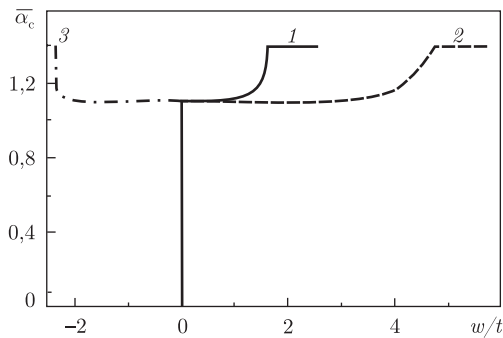


Рис. 3

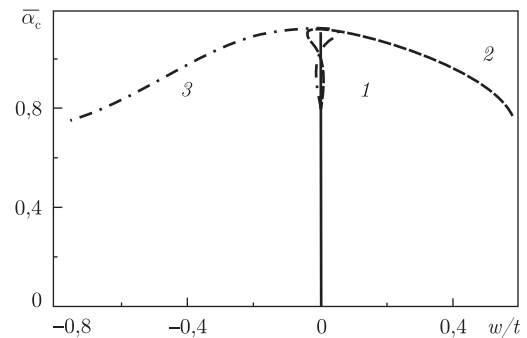


Рис. 4

дельной, так как нагрузка на оболочку может превосходить это значение, однако при этом происходит непропорционально большой рост прогибов. На рис. 2, б представлены кривые для той же оболочки, но полученные с применением кубического варианта теории типа Тимошенко. На этих кривых параметр  $\alpha_c^{(2)} = 1,091$ , но нагрузка может возрастать только до  $\alpha_n = 1,210$ . По достижению этого значения рост прогибов происходит при уменьшающейся нагрузке.

Применяя только уточненную теорию, рассмотрим пример расчета оболочки толщиной  $t = 0,1$  м при  $N = 8$  для двух значений сдвиговой жесткости. Равновесные кривые при  $\alpha_{77} = 0,0806$  приведены на рис. 3. Здесь, в отличие от предыдущих примеров, вычисляемая критическая нагрузка отнесена к нагрузке, определяемой по формуле (15). В этом случае  $\bar{\alpha}_c = 1,093$ . Кривые имеют начальный участок, практически параллельный оси абсцисс, который затем загибается кверху. Такое поведение кривых свидетельствует об устойчивом закритическом поведении оболочки. Полученные при  $\alpha_{77} = 0,00806$  равновесные кривые имеют вид, представленный на рис. 4. Для этой оболочки  $\bar{\alpha}_c = 1,081$ . В отличие от кривых на предыдущем рисунке, приведенные на рис. 4 обращены выпуклостью кверху. Снижение параметра  $\alpha_{77}$  привело в этом примере к такому изменению жесткости оболочки в целом, что ее закритическое поведение становится неустойчивым. Параметр  $p = 0,707$  для исходной оболочки и  $p = 0,195$  — для оболочки с уменьшенной сдвиговой жесткостью. Поэтому, хотя значения  $\bar{\alpha}_c$  в обоих случаях близки, критические нагрузки отличаются в той же мере, как отличаются приведенные значения параметра  $p$ .

Таким образом, полученные результаты позволяют прийти к заключению, что для длинных гофрированных цилиндрических оболочек

- а) нелинейной теорией типа Тимошенко в квадратичном варианте можно пользоваться с небольшой погрешностью для расчета критических нагрузок, но нельзя исследовать закритическое поведение;
- б) пониженная сдвиговая жесткость композитов приводит не только к снижению критических нагрузок, но может также существенно влиять на характер закритического поведения оболочек.

Полученные с использованием предложенной численной методики результаты для длинных круговых оболочек согласуются с представленными в [7, 10].

1. Григоренко Я. М., Савула Я. Г., Муха И. С. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного анализа // Прикл. механика. — 2000. — **36**, № 8. — С. 3–27.

2. *Баженов В. А., Семенов М. П., Трач В. М.* Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – Київ: Каравела, 2010. – 352 с.
3. *Семенов Н. П.* Уточненный вариант нелинейной теории оболочек типа Тимошенко и его приложение к расчету начального закритического поведения длинных цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 8. – С. 47–52.
4. *Семенов Н. П., Жукова Н. Б.* О точности нелинейных соотношений теории оболочек типа Тимошенко в случае пренебрежения поперечным сжатием // Там же. – 1990. – **26**, № 10. – С. 30–36.
5. *Ванин Г. Л., Семенов Н. П., Емельянов Р. Ф.* Устойчивость оболочек из армированных материалов. – Киев: Наук. думка, 1978. – 212 с.
6. *Григолок Э. И., Шалашин В. И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – Москва: Наука, – 1988. – 232 с.
7. *Гуляев В. М., Баженов В. А., Гоцуляк Б. А.* Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Вища шк., 1982. – 255 с.
8. *Семенов Н. П., Трач В. М., Жукова Н. Б.* Об исследовании нелинейного поведения тонких оболочек шаговым методом // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 9. – С. 85–93.
9. *Тарнопольский Ю. М., Розе А. В.* Особенности расчета деталей из армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с.
10. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 567 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 18.02.2011*

**N. P. Semenyuk, N. B. Zhukova, N. I. Ivanova**

### **On calculation of supercritical behavior of cylindrical corrugated shells under external pressure**

*The technique of calculation of the stability and the post-buckling behavior of long corrugated open-ended shells within a cubic version of the Timoshenko-type theory of shells is offered. With the help of the virtual displacement principle, the system of nonlinear differential equations is obtained. For its linearization, the modified incremental method is used. The solution of the boundary-value problem is obtained with the use of the discrete orthogonalization method. The examples of numerical calculations are given.*