Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

12 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.988.28

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Обращение локального преобразования Помпейю на двухточечно-однородных пространствах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Досліджено проблеми, пов'язані з ін'єктивністю локального перетворення Помпейю на двоточково-однорідних просторах. Знайдено явну формулу обернення для оператора середнього значення по шарах та сферах одного фіксованого радіуса.

Пусть X — риманово двухточечно-однородное пространство с функцией расстояния $d(\cdot,\cdot)$, G — группа изометрий X, $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i=1}^{s}$ — заданное семейство распределений с компактным носителем в X [1, гл. 1]. При фиксированном $g \in G$ рассмотрим распределение gT_i, действующее на $C^\infty(X)$ по правилу $\langle gT_i, f\rangle = \langle T_i, f \circ g^{-1}\rangle$, $f \in C^\infty(X)$. Для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset X$ такого, что каждое из множеств $\Lambda(\mathcal{U}, T_i) = \{g \in G\colon \operatorname{supp} gT_i \subset \mathcal{U}\}$, $i = 1,\dots,s$, непусто, преобразование Помпейю $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}$ отображает $C^\infty(\mathcal{U})$ в декартово произведение $C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, T_1)) \times \cdots \times C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, T_s))$ следующим образом: $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}(f) = (f_1,\dots,f_s)$, где $f_i(g) = \langle gT_i, f\rangle$, $g \in \Lambda(\mathcal{U}, T_i)$, $i = 1,\dots,s$. Для заданных $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ возникают следующие проблемы (см., например, [2, § 3]): (i) выяснить, является ли преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}$ инъективным; (ii) если $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}$ не является инъективным, то описать его ядро; (iii) если $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}$ инъективно, то найти обратное отображение.

Помимо самостоятельного интереса, эти задачи имеют глубокие связи с периодичностью в среднем, теорией гармонических функций, рядами экспонент, теорией аппроксимации, микролокальным анализом, оценками плотности упаковок в комбинаторной геометрии, а также различными вопросами комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории отображений, сохраняющих меру, и теории графов (см. [2–5]).

Следуя классическим работам Минковского, Функа, Радона и Помпейю (см., например, [6, прил., п. 6; 2, § 3]), многие исследователи изучали проблемы (i)–(iii), когда T_i равно χ_{r_i} или σ_{r_i}, где χ_{r_i} — индикатор открытого шара B_{r_i} радиуса r_i с центром в нуле, а σ_{r_i} — поверхностная дельта-функция сферы ∂B_{r_i}, $i = 1,\dots,s$. Однако даже в этих модельных случаях полное решение сформулированных задач далеко от завершения и известно лишь при $s = 1$ [5, ч. 2; 7; 8]. Для семейства $\mathcal{F} = \{\chi_{r_1}, \chi_{r_2}\}$ и $\mathcal{U} = B_R$ найдены необходимые и достаточные условия инъективности $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}$ [8, 9], а по проблемам (*ii*), (*iii*) получены только некоторые частные результаты [10–12]. При $s \geqslant 3$ даже исследование инъективности $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}$ в рассматриваемой ситуации наталкивается на непреодолимые трудности. Немногочисленные результаты, относящиеся к этому случаю, содержатся в [13, ч. 4].

В современных исследованиях особое внимание уделяется нахождению явных формул, позволяющих восстанавливать функцию по известному преобразованию Помпейю. Результатов в этом направлении получено немного и все они относятся к случаю глобального преобразования Помпейю, т. е. когда $\mathcal{U} = X$ [13, ч. 4]. Для локального преобразования Помпейю известны лишь достаточно громоздкие процедуры восстановления для отдельных пространств X, семейства $\mathcal{F} = \{\chi_{r_1}, \chi_{r_2}\}$ и $\mathcal{U} = B_R$ (см. [10–12]). В данной работе мы приводим явную формулу обращения для $\mathcal{P}_{\{\chi_r,\sigma_r\},B_R}$ в случае произвольного двухточечно-однородного пространства X.

Обозначения и предварительные конструкции. В работе используются следующие стандартные обозначения: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — соответственно множества вещественных, комплексных, натуральных, целых и целых неотрицательных чисел; $[t]$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}$; $\overline{\lambda}$ — комплексное сопряжение к числу $\lambda \in \mathbb{C}$; $\delta_{A,B}$ — символ Кронекера; Γ — гамма-функция; $P_l^{(\alpha,\beta)}(t)$ — многочлены Якоби; $C_l^{\gamma}(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

Пусть $a \in [0,1]$, $\psi \in [0,\pi]$. Для $\alpha > \beta > -1/2$, $p \geqslant q$, $p,q \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\xi_{p,q}^{\alpha,\beta}(a,\psi) = P_q^{(\alpha-\beta-1,\beta+p-q)}(2a^2-1)a^{p-q}\mathcal{C}_{p-q}^{\beta}(\psi), \tag{1}$$

где $\mathcal{C}_{p-q}^{\beta}(\psi) = (\beta+p-q)\Gamma(\beta)C_{p-q}^{\beta}(\cos\psi)$, если $\beta \neq 0$,

$$\mathcal{C}_{p-q}^{0}(\psi) = \begin{cases} 2\cos((p-q)\psi), & p \neq q, \\ 1, & p = q. \end{cases}$$

Если $\alpha = \beta$ или $\beta = -1/2$, то вместо (1) ниже используется система $\mathcal{C}_p^{\alpha}(\psi)$. Для единства записи разложений по указанным системам положим

$$\xi_{p,q}^{\alpha,\alpha}(1,\psi) = \delta_{q,0}\mathcal{C}_p^{\alpha}(\psi),$$

$$\xi_{p,q}^{\alpha,-1/2}(a,0) = \frac{\sqrt{\pi}(-1)_{p-q}}{(p-q)!}(1-2p+2q)P_q^{(\alpha-1/2,p-q-1/2)}(2a^2-1)a^{p-q}, \qquad a \in [-1,1].$$

Некоторая информация о сходимости рядов по системе $\xi_{p,q}^{\alpha,\beta}(a,\psi)$ содержится в [14, разд. 8.1].

Дальнейшие построения опираются на классификацию двухточечно-однородных пространств и их реализации. Как известно (см. [1, гл. 1, § 4, п. 2.3]), все такие пространства состоят из: 1) вещественных евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$; 2) гиперболических пространств $\mathbb{H}^n_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K}$ обозначает поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, или тело кватернионов $\mathbb{Q}$); 3) гиперболической плоскости Кэли $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$; 4) евклидовых сфер $\mathbb{S}^n$; 5) проективных пространств $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$; 6) проективной плоскости Кэли $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$.

Пусть $\mathfrak{X}_1$ — класс некомпактных пространств X, отличных от $\mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{X}_2$ — класс компактных X. Если $X \in \mathfrak{X}_1$, условимся, что максимум секционной кривизны X равен -1, а в случае $X \in \mathfrak{X}_2$ предположим, что минимум секционной кривизны X равен 1. Указанные максимум и минимум обозначим ε_X, а для $X = \mathbb{R}^n$ положим $\varepsilon_X = 0$. Кроме того, будем считать, что вещественная размерность a_X пространства X не меньше 2 и использовать реализации для X, описанные в [13, ч. 1, гл. 2, 3]. В частности, из [13, ч. 1, гл. 2, 3] видно, что геодезический шар $B_R = \{x \in X\colon d(0,x) < R\}$ $(0 < R \leqslant \operatorname{diam} X)$ совпадает с открытым евклидовым шаром из $\mathbb{R}^{a_X}$ с центром в нуле и соответствующим радиусом.

Далее, пусть $\alpha_X = -1 + a_X/2$, а $\beta_X = n/2 - 1, -1/2, 0, 1, 3$ соответственно в каждом из следующих пяти случаев: 1) $X = \mathbb{R}^n$, $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, $X = \mathbb{S}^n$; 2) $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$; 3) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$; 4) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$, $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$; 5) $X = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$, $X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$. Площадь сферы радиуса r в X равна

$$A_X(r) = b_X \frac{(\Omega(r))^{2\alpha_X+1}}{(1+\varepsilon_X\Omega^2(r))^{\rho_X}}, \qquad \text{где} \qquad b_X = \frac{2\pi^{a_X/2}}{\Gamma(a_X/2)}; \qquad \rho_X = \alpha_X + \beta_X + 1;$$

Ω — обратная функция к функции $\Omega^{-1}(r) = d(0, r\mathbf{e})$, $\mathbf{e} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{a_X}$.

Пусть $\mathfrak{X}_3$ — класс двухточечно-однородных пространств постоянной кривизны, т. е. $\mathfrak{X}_3 = \{\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}, \mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}\}$. Возьмем $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \ldots, M_X(k)\}$, где $M_X(k) = 0$, если $X \in \mathfrak{X}_3$, и $M_X(k) = [k/2]$, если $X \notin \mathfrak{X}_3$. Определим $\mathcal{H}^{k,m}_X = \mathcal{H}^k_{a_X}$ в случае $X \in \mathfrak{X}_3$ и

$$\mathcal{H}^{k,m}_X = \{f \in \mathcal{H}^k_{a_X} : (Lf)(x) = 4\varepsilon_X(m - \beta_X)(k-m)(1 + \varepsilon_X|x|^2)f(x)\}$$

в случае $X \notin \mathfrak{X}_3$, где $\mathcal{H}^k_{a_X}$ — пространство однородных гармонических многочленов степени k в $\mathbb{R}^{a_X}$, L — оператор Лапласа–Бельтрами на X. Обозначим через $\mathrm{O}(a_X)$ ортогональную группу в $\mathbb{R}^{a_X}$. После отождествления $\mathcal{H}^{k,m}_X$ с пространством сужений его элементов на сферу $\mathbb{S}^{a_X-1} = \{x \in \mathbb{R}^{a_X} : |x| = 1\}$ $\mathcal{H}^{k,m}_X$ становится инвариантным подпространством квазирегулярного представления $\mathfrak{T}(\tau)$ группы $K = G \cap \mathrm{O}(a_X)$ на $L^2(\mathbb{S}^{a_X-1})$. Если $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$ — сужение $\mathfrak{T}(\tau)$ на $\mathcal{H}^{k,m}_X$, то $\mathfrak{T}(\tau)$ является ортогональной прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \ldots, M_X(k)\}$ (см. [7, § 2; 13, ч. 1, гл. 4]).

Произвольная точка $x \in \mathbb{R}^{a_X} \setminus \{0\}$ представима в виде $x = \varrho\sigma$, где $\varrho = |x|$, $\sigma = x/|x|$. Всякой функции $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d^{k,m}_X} f_{k,m,j}(\varrho) Y^{k,m}_j(\sigma), \tag{2}$$

где $d^{k,m}_X$ — размерность $\mathcal{H}^{k,m}_X$, $\{Y^{k,m}_j\}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{k,m}_X$ относительно поверхностной меры $d\omega$ на $\mathbb{S}^{a_X-1}$ и

$$f_{k,m,j}(\varrho) = \int\limits_{\mathbb{S}^{a_X-1}} f(\varrho\sigma)\overline{Y^{k,m}_j(\sigma)}\, d\omega(\sigma).$$

Если $f \in C^\infty(B_R)$, то ряд (2) сходится к f в пространстве $C^\infty(B_R)$ (см. [13, ч. 2]). Положим $C^\infty_{k,m,j}(B_R) = \{f \in C^\infty(B_R)\colon f = f^{k,m,j}\}$, где $f^{k,m,j}(x) = f_{k,m,j}(\varrho)Y^{k,m}_j(\sigma)$. Аналогом класса $C^\infty_{0,0,1}(B_R)$ в одномерном случае является совокупность $C^\infty_\natural(-R,R)$ всех четных функций из $C^\infty(-R,R)$.

Положим $\mathcal{A}^{k,m}_j = \mathfrak{A}^{-1}_{0,0,1}\mathfrak{A}_{k,m,j}$, где $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ — гомеоморфизм между $C^\infty_{k,m,j}(B_R)$ и $C^\infty_\natural(-R,R)$, определенный в [13, ч. 2]. Обратное отображение $(\mathcal{A}^{k,m}_j)^{-1}$ будем обозначать $\mathcal{B}^{k,m}_j$. Операторы $\mathcal{A}^{k,m}_j$ играют важную роль при изучении проблем (i)–(iii) и их обобщений.

Формулировка основного результата. Положим $\epsilon_X = \varepsilon_X$, если $X \in \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2$, и $\epsilon_X = -1$, если $X = \mathbb{R}^n$. Для t_1, $t_2 > 0$ таких, что $t_1 + t_2 < \operatorname{diam} X$ введем функцию Ξ_{t_1,t_2} по формуле

$$\Xi_{t_1,t_2}(a,\psi) = \Omega(d(\Omega(t_1)\eta, \Omega(t_2)\mathbf{e})), \qquad (a,\psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2}),$$

где множество $\mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2})$ и точка $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{a_X}) \in \mathbb{S}^{a_X - 1}$ определяются для каждого X следующим образом:

1) если $X \notin \mathfrak{X}_3$, то $\mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2}) = \{(a,\psi)\colon a \in [0,1], \psi \in [0,\pi]\}$, $\eta_1 = \varepsilon_X a \cos\psi$, $\eta_2 = \sqrt{1-a^2}$, $\eta_{a_X/2+1} = \varepsilon_X a \sin\psi$;

2) если $X \in \mathfrak{X}_3$ и $X \neq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, то $\mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2}) = \{(1,\psi)\colon \psi \in [0,\pi]\}$, $\eta_1 = \epsilon_X \cos\psi$, $\eta_2 = \sin\psi$;

3) если $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, то $\mathcal{M}(\Xi_{t_1,t_2}) = \{(a,0)\colon a \in [-1,1]\}$, $\eta_1 = a$, $\eta_2 = \sqrt{1-a^2}$.

Определим операторы $D(\alpha,\beta)$ и $\mathfrak{D}(\alpha,\beta)$ равенствами

$$(D(\alpha,\beta)\varphi)(\varrho) = \frac{(1+\varepsilon_X\varrho^2)^{\beta+1}}{\varrho^\alpha}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\varrho^\alpha}{(1+\varepsilon_X\varrho^2)^\beta}\varphi(\varrho)\right),$$

$$(\mathfrak{D}(\alpha,\beta)\varphi)(\varrho) = \frac{(1+\varepsilon_X\varrho^2)^{\beta+1}}{\varrho^\alpha}\int\limits_0^\varrho \frac{\xi^\alpha}{(1+\varepsilon_X\xi^2)^\beta}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Для краткости обозначим

$$\zeta_{p,q} = \frac{\Gamma(\beta_X+p+1)}{(\alpha_X+p+q)\Gamma(\alpha_X+p)},$$

$$\mathbf{D}_{p,q,1} = \frac{\zeta_{p-1,q}}{\zeta_{p+1,q}}\mathfrak{D}(2\alpha_X+p+q+1, \rho_X+p)D(1-p-q, 1-p),$$

$$\mathbf{D}_{p,q,2} = \frac{2\zeta_{p,q}}{\zeta_{p+1,q}}\frac{p+q+\alpha_X-\varepsilon_X\Omega^2(r)(\beta_X+p-q)}{\Omega(r)}\mathfrak{D}(2\alpha_X+p+q+1, \rho_X+p),$$

$$\mathbf{D}_{p,q,3} = \frac{(\alpha_X+p-1)(\alpha_X+p+q+1)}{(\alpha_X+p+q-1)(\beta_X+p)}\mathfrak{D}(2\alpha_X+p+q+1, \alpha_X+q+1)D(1-p-q, 1-p),$$

$$\mathbf{D}_{p,q,4} = \frac{2(\alpha_X+p+q+1)}{\Omega(r)}\mathfrak{D}(2\alpha_X+p+q+1, \alpha_X+p+1),$$

$$\mathbf{D}_{p,1} = \mathfrak{D}\left(n+p-1, \frac{n+p-1}{2}\right)D\left(1-p, \frac{1-p}{2}\right),$$

$$\mathbf{D}_{p,2} = \frac{n+2p-2}{\Omega(r)}\mathfrak{D}\left(n+p-1, \frac{n+p-1}{2}\right),$$

$$\mathbf{D}_{p,3} = \mathfrak{D}(n+p-1, 0)D(1-p, 0), \qquad \mathbf{D}_{p,4} = \frac{n+2p-2}{r}\mathfrak{D}(n+p-1, 0).$$

Символ $\times$ ниже используется для свертки распределений на областях в X [1, гл. 2].

Известно, что преобразование $\mathcal{P}_{\{\chi_r,\sigma_r\},B_R}$ инъективно лишь при условии $R \geqslant 2r$ (см. [13, ч. 4]). Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C^{\infty}(B_R)$, $R \geqslant 2r$. *Тогда*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d_X^{k,m}} \mathcal{B}_j^{k,m} h,$$

где ряд сходится к f *в пространстве* $C^{\infty}(B_R)$ *и радиальная функция* h *однозначно восстанавливается по известным* $f \times \chi_r$ *и* $f \times \sigma_r$ *с помощью разложения*

$$h(\Xi_{t,r}(a,\psi)\mathbf{e}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} d_{p,q}(h,t,r) \xi_{p,q}^{\alpha_X,\beta_X}(a,\psi), \quad t \in (0, R-r), \quad (a,\psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{r,t}), \tag{3}$$

в котором

$$d_{0,0}(h,t,r) = \frac{\mathcal{A}_j^{k,m}((f \times \sigma_r)^{k,m,j})(\Omega(t)\mathbf{e})}{A_X(r)\Gamma(\beta_X + 1)}, \tag{4}$$

$$d_{1,0}(h,t,r) = -\epsilon_X \frac{(\alpha_X + 1)}{A_X(r)\Gamma(\beta_X + 2)} D(0,0)(\mathcal{A}_j^{k,m}((f \times \chi_r)^{k,m,j})(\varrho\mathbf{e}))(\Omega(t)) \tag{5}$$

и для каждого пространства X *справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

(i) если $X \notin \mathfrak{X}_3$, *то при* $p - 1 \geqslant q \geqslant 0$

$$\begin{aligned} d_{p+1,q}(h,\Omega^{-1}(t),r) &= \mathbf{D}_{p,q,1}(d_{p-1,q}(h,\Omega^{-1}(\varrho),r))(t) + \varepsilon_X \mathbf{D}_{p,q,2}(d_{p,q}(h,\Omega^{-1}(\varrho),r))(t), \\ d_{p,q+1}(h,\Omega^{-1}(t),r) &= \mathbf{D}_{p,q,3}(d_{p-1,q}(h,\Omega^{-1}(\varrho),r))(t) + \varepsilon_X \mathbf{D}_{p,q,4}(d_{p,q}(h,\Omega^{-1}(\varrho),r))(t); \end{aligned} \tag{6}$$

(ii) если $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ *или* $X = \mathbb{S}^n$, *то имеет место соотношение* (6) *при* $q = 0$*;*

(iii) если $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, *то*

$$d_{p+1}(h,\Omega^{-1}(t),r) = \mathbf{D}_{p,1}(d_{p-1}(h,\Omega^{-1}(\varrho),r))(t) + \mathbf{D}_{p,2}(d_p(h,\Omega^{-1}(\varrho),r))(t), \quad p \geqslant 1, \tag{7}$$

где

$$d_p(h,t,r) = \frac{\Gamma(1/2 + [(p+1)/2])}{(\alpha_X + p)\Gamma(\alpha_X + [(p+1)/2])} d_{[(p+1)/2],[p/2]}(h,t,r), \qquad p \in \mathbb{Z}_+; \tag{8}$$

(iv) если $X = \mathbb{R}^n$, *то*

$$d_{p+1}(h,t,r) = \mathbf{D}_{p,3}(d_{p-1}(h,\varrho,r))(t) - \mathbf{D}_{p,4}(d_p(h,\varrho,r))(t), \qquad p \geqslant 1, \tag{9}$$

где

$$d_p(h,t,r) = d_{p,0}(h,t,r), \qquad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Сделаем несколько замечаний. Явный вид операторов $\mathcal{B}_j^{k,m} = \mathfrak{A}_{k,m,j}^{-1}\mathfrak{A}_{0,0,1}$ содержится в [13, ч. 2]. Если $X \in \mathfrak{X}_3$ и $X \neq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, то двойная сумма в (3) вырождается и сводится к ряду по парам вида $(p,0)$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, h определяется коэффициентами $d_{p,0}(h,t,r)$, которые находятся из (4), (5), соотношения (6) при $q = 0$ и (9). Аналогично, если $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, то суммирование в (3) происходит по парам (p,p) и $(p+1,p)$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Тем самым равенства (7) и (8) восстанавливают h по известным $f \times \chi_r$ и $f \times \sigma_r$. Наконец, ввиду вышесказанного и [14, разд. 8.1], сходимость в (3) является абсолютной и равномерной на $\mathcal{M}(\Xi_{r,t})$.

1. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – Москва: Мир, 1987. – 735 с.
2. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 54. – Москва: ВИНИТИ, 1989. – С. 5–111.
3. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations / Eds. B. Fuglede et al. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – P. 185–194.
4. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" // Radon Transforms and Tomography, Contemp. Math. – 2001. – **278**. – P. 69–74.
5. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.
6. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. – Москва: Мир, 1983. – 150 с.
7. *Волчков Вит. В.* О функциях с нулевыми шаровыми средними на компактных двухточечно-однородных пространствах // Матем. сб. – 2007. – **198**, № 4. – С. 21–46.
8. *Волчков В. В.* Локальная теорема о двух радиусах на симметрических пространствах // Там же. – 2007. – **198**, № 11. – С. 21–46.
9. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* New results in integral geometry // Contemp. Math. – 2005. – **382**. – P. 417–432.
10. *Berenstein C. A., Gay R., Yger A.* Inversion of the local Pompeiu transform // J. Anal. Math. – 1990. – **54**. – P. 259–287.
11. *Berkani M., El Harchaoui M., Gay R.* Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique – Cas des deux boules // J. Complex Variables. – 2000. – **43**. – P. 29–57.
12. *Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.* Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Докл. РАН. – 2001. – **379**, № 5. – С. 587–590.
13. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
14. *Koornwinder T. H.* Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups // Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications / Eds. R. A. Askey et al. – Dordrecht: Reidel, 1984. – P. 1–85.

Донецкий национальный университет

Поступило в редакцию 11.01.2011

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Inversion of a local Pompeiu transform on two-point homogeneous spaces

Problems related to the injectivity of a local Pompeiu transform on two-point homogeneous spaces are studied. An explicit inversion formula for the mean-value operator over balls and spheres with single fixed radius is found.