УДК 512.544

О. Ю. Дашкова

Об одном классе модулей над групповыми кольцами локально разрешимых групп с условием $\min -nnd$

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Досліджено $\mathbf{R}G$*-модуль* A *такий, що* $\mathbf{R}$ *— цілісне кільце, група* G *локально розв'язна,* $C_G(A) = 1$*, фактормодуль* $A/C_A(G)$ *не є нетеровим* $\mathbf{R}$*-модулем та система всіх підгруп* $H \leqslant G$*, для яких фактормодулі* $A/C_A(H)$ *не є нетеровими* $\mathbf{R}$*-модулями, задовольняє умову мінімальності. Ця умова називається умовою* $\min -nnd$*. Отримано деякі властивості групи* G*.*

Пусть A — векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $GL(F, A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F, то группа $GL(F, A)$ может быть отождествлена с группой невырожденных квадратных матриц размерности $n \times n$ над полем F, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют особую роль в различных областях науки и достаточно исследованы. В случае, когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация кардинально меняется. Изучение бесконечномерных линейных групп возможно лишь при наложении на них дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. В [1] введено понятие центральной размерности бесконечномерной линейной группы. Пусть H — подгруппа группы $GL(F, A)$. H действует на факторпространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Авторы полагают $\dim_F H = \dim_F(A/C_A(H))$. Говорят, что подгруппа H имеет конечную центральную размерность, если $\dim_F H$ конечна. В противном случае полагают, что центральная размерность подгруппы H бесконечна. Как выяснилось, линейные группы конечной центральной размерности по своей структуре достаточно близки к обычным конечномерным линейным группам. В связи с этим естественно возникает вопрос об исследовании линейных групп бесконечной центральной размерности.

Пусть $G \leqslant GL(F, A)$. В [1] введена в рассмотрение система подгрупп $\mathbf{L_{id}(G)}$, состоящая из всех подгрупп группы G, имеющих бесконечную центральную размерность. При исследовании линейных групп бесконечной центральной размерности естественно рассмотреть случаи, когда система $\mathbf{L_{id}(G)}$ "достаточно мала". В [1] изучались локально разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathbf{L_{id}(G)}$ удовлетворяет условию минимальности. В [2] исследовались разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых система $\mathbf{L_{id}(G)}$ удовлетворяет условию максимальности.

Если $G \leqslant GL(F, A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обобщением данного случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$-модуля A, где $\mathbf{R}$ — кольцо, структура которого достаточно близка к структуре поля. При этом обобщением понятия центральной размерности линейной группы является понятие коцентрализатора подгруппы, введенное в [3]. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Если $H \leqslant G$, то фактормодуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.

Следует отметить, что в теории модулей существует ряд обобщений понятия конечномерного векторного пространства. Это модули, обладающие конечными композиционными рядами, конечно порожденные модули, артиновы модули, нетеровы модули. Достаточно широкими классами модулей над групповыми кольцами являются артиновы модули над групповыми кольцами и нетеровы модули над групповыми кольцами. Напомним, что модуль называется артиновым, если частично упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию минимальности. Модуль называется нетеровым, если частично упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию максимальности. Многие проблемы алгебры нуждаются в исследовании некоторых специфических артиновых и нетеровых модулей над групповыми кольцами, а также модулей над групповыми кольцами, которые не являются артиновыми или нетеровыми, но в некотором смысле близки к ним.

В [4] изучался $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $\mathbf{R}$ — дедекиндово кольцо, и коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Введена в рассмотрение система $L_{nad}(G)$ всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями. На $L_{nad}(G)$ введен порядок относительно обычного включения подгрупп. Если $L_{nad}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество, говорят, что группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями, или, просто, что группа G удовлетворяет условию $\min -nad$. В [4] описана структура локально разрешимой группы с условием $\min -nad$.

В данной работе изучается $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Пусть $L_{nnd}(G)$ — система всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{R}$-модулями. Введем на $L_{nnd}(G)$ порядок относительно обычного включения подгрупп. Если $L_{nnd}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{R}$-модулями, или, просто, что группа G удовлетворяет условию $\min -nnd$. В работе изучаются локально разрешимые группы с условием $\min -nnd$ и обобщаются некоторые результаты работы [1]. Рассматривается случай, когда $\mathbf{R}$ — произвольное целостное кольцо. Аналогичная проблема для $\mathbf{R}G$-модуля A, когда $\mathbf{R}$ является кольцом целых чисел, исследовалась в [5].

Далее всюду рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $C_G(A) = 1$, $\mathbf{R}$ — целостное кольцо.

Приведем некоторые элементарные факты о $\mathbf{R}G$-модулях. Так, если $K \leqslant H \leqslant G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, то коцентрализатор подгруппы K в модуле A также является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Если U, V — подгруппы группы G такие, что их коцентрализаторы в модуле A — нетеровы $\mathbf{R}$-модули, то фактормодуль $A/(C_A(U) \bigcap C_A(V))$ также является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Поэтому коцентрализатор подгруппы $\langle U, V \rangle$ в модуле A — нетеров $\mathbf{R}$-модуль.

Предположим, что группа G удовлетворяет условию $\min -nnd$. Если $H_1 > H_2 > H_3 > > \cdots$ — бесконечный строго убывающий ряд подгрупп группы G, то существует такое натуральное число n, что коцентрализатор подгруппы H_n в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Кроме того, если N — нормальная подгруппа группы G и коцентрализатор подгруппы N в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, то факторгруппа G/N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Лемма. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, и предположим, что группа G удовлетворяет условию $\min -nnd$. Пусть X, H — подгруппы группы G, Λ — бесконечное множество и выполнены следующие условия:*

(i) $X = Dr_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, *где* $1 \neq X_\lambda$ — H*-инвариантная подгруппа группы* X *для каждого* $\lambda \in \Lambda$;

(ii) $H \bigcap X \leqslant Dr_{\lambda\in\Gamma}X_\lambda$ *для некоторого подмножества* Γ *множества* Λ.

Если множество $\Omega = \Lambda\backslash\Gamma$ *бесконечно, то коцентрализатор подгруппы* H *в модуле* A — *нетеров* $\mathbf{R}$*-модуль.*

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 2.1 из [1].

Следующий результат дает важную информацию о структуре факторгруппы G/G'.

Предложение. *Пусть* A — $\mathbf{R}G$*-модуль. Предположим, что группа* G *удовлетворяет условию* $\min -nnd$ *и коцентрализатор группы* G *в модуле* A *не является нетеровым* $\mathbf{R}$*-модулем. Тогда факторгруппа* G/G' *является черниковской группой.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть факторгруппа G/G' не является черниковской группой. Пусть S — множество всех подгрупп $H \leqslant G$ таких, что факторгруппа H/H' не является черниковской группой, и коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Поскольку $G \in S$, то $S \neq \varnothing$. Так как S удовлетворяет условию минимальности, то S имеет минимальный элемент. Обозначим его через D. Если U, V — собственные подгруппы группы D такие, что $D = UV$ и $U \bigcap V = D'$, то по крайней мере одна из этих подгрупп, скажем U, такова, что коцентрализатор U в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Из выбора подгруппы D вытекает, что факторгруппа U/U' является черниковской группой. Следовательно, факторгруппа $U/D' \simeq (U/U')/(D'/U')$ черниковская. Поскольку коцентрализатор подгруппы U в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, то абелева факторгруппа D/U также является черниковской, и поэтому факторгруппа D/D' черниковская. Противоречие с выбором подгруппы D. Следовательно, факторгруппа D/D' неразложима. Отсюда вытекает, что факторгруппа D/D' изоморфна подгруппе квазициклической группы C_{q^∞} для некоторого простого числа q. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию $\min -nnd$. Обозначим через $ND(G)$ множество всех элементов $x \in G$ таких, что коцентрализатор подгруппы $\langle x\rangle$ в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Поскольку $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех x, $g \in G$, то $ND(G)$ — нормальная подгруппа группы G.

Теорема 1. *Пусть* A — $\mathbf{R}G$*-модуль,* G — *периодическая локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию* $\min -nnd$*, и коцентрализатор группы* G *в модуле* A *не является нетеровым* $\mathbf{R}$*-модулем. Тогда либо группа* G *удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, либо* $G = ND(G)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть группа G не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, $G \neq ND(G)$, и пусть S — множество таких подгрупп $H \leqslant G$, что H не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, $H \neq ND(H)$. Тогда $S \neq \varnothing$. Покажем, что S удовлетворяет условию минимальности. Пусть $\{H_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ — некоторое непустое подмножество множества S. Поскольку $H_\sigma \neq ND(H_\sigma)$ для любого $\sigma \in \Sigma$, то для любого $\sigma \in \Sigma$ существует элемент $h_\sigma \in H_\sigma$ такой, что его коцентрализатор в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Так как $C_A(H_\sigma) \leqslant C_A(\langle h_\sigma\rangle)$, то коцентрализатор подгруппы H_σ в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Поскольку группа G удовлетворяет условию $\min -nnd$, то множество S удовлетворяет условию минимальности. Пусть M — минимальный элемент S, $L = ND(M)$. Существует строго убывающий ряд подгрупп группы M: $V_1 > V_2 > V_3 > \cdots$.

Поскольку группа M удовлетворяет условию $\min -nnd$, найдется такое натуральное число k, что коцентрализатор подгруппы V_k в модуле A — нетеров $\mathbf{R}$-модуль. Следовательно, $V_k \leqslant L$, и поэтому подгруппа L не удовлетворяет условию минимальности. Из выбора подгруппы M вытекает, что если $x \in M \setminus L$, то $\langle x, L\rangle = M$. Следовательно, факторгруппа M/L имеет простой порядок q. Заменяя x, если это необходимо, подходящей степенью, можно считать, что элемент x имеет порядок q^r для некоторого натурального числа r. Так как подгруппа M не является черниковской, по теореме Д. И. Зайцева [7] получаем, что M содержит $\langle x\rangle$-инвариантную подгруппу $B = Dr_{n\in\mathbf{N}}\langle b_n\rangle$, и можно считать, что каждый элемент b_n имеет простой порядок для каждого $n \in \mathbf{N}$. Пусть $1 \neq c_1 \in B$ и $C_1 = \langle c_1\rangle^{\langle x\rangle}$. Тогда подгруппа C_1 конечна и существует подгруппа E_1 такая, что $B = C_1 \times E_1$. Положим $U_1 = core_{\langle x\rangle}E_1$. Тогда подгруппа U_1 имеет конечный индекс в B. Если $1 \neq c_2 \in U_1$ и $C_2 = \langle c_2\rangle^{\langle x\rangle}$, то C_2 является конечной $\langle x\rangle$-инвариантной подгруппой и $\langle C_1, C_2\rangle = C_1 \times C_2$. Продолжив построение, мы получим семейство $\{C_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ конечных $\langle x\rangle$-инвариантных подгрупп группы B таких, что $\{C_n \mid n \in \mathbf{N}\}= Dr_{n\in\mathbf{N}}C_n$. Согласно лемме, $x \in L$. Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — локально разрешимая группа и в случае, когда коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, группа G удовлетворяет условию $\min -nnd$. Тогда либо группа G разрешима, либо G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп $1 = W_0 \leqslant W_1 \leqslant \cdots \leqslant W_n \leqslant \cdots \leqslant W_\omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} W_n \leqslant G$ таким, что коцентрализатор каждой подгруппы W_n в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, факторы W_{n+1}/W_n абелевы для $n = 1, 2, \ldots$, и факторгруппа G/W_ω является черниковской группой.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда $A/C_A(G)$ — конечно порожденный $\mathbf{R}$-модуль. Поскольку $\mathbf{R}$ является целостным кольцом, то $\mathbf{R}$ можно вложить в некоторое поле F. Поэтому факторгруппа $G/C_G(A/C_A(G))$ изоморфна локально разрешимой подгруппе группы $GL(r, F)$. С учетом следствия 3.8 [6] получаем, что факторгруппа $G/C_G(A/C_A(G))$ разрешима. Поскольку подгруппа $C_G(A/C_A(G))$ абелева, группа G разрешима.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Докажем сначала, что группа G гиперабелева. Для этого покажем, что каждый нетривиальный образ группы G содержит нетривиальную нормальную абелеву подгруппу.

Пусть H — собственная нормальная подгруппа группы G. Предположим сначала, что коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда факторгруппа G/H удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Следовательно, G/H является черниковской группой и содержит нетривиальную нормальную абелеву подгруппу. Теперь предположим, что коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Пусть $S = \{M_\sigma/H | \sigma \in \Sigma\}$ — семейство всех нетривиальных нормальных подгрупп факторгруппы G/H. Рассмотрим сначала случай, когда для каждого $\sigma \in \Sigma$ коцентрализатор подгруппы M_σ в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Покажем, что в этом случае факторгруппа G/H удовлетворяет условию минимальности для нормальных подгрупп. Пусть $\{M_\delta/H\}$ — непустое подмножество S. Для каждого δ коцентрализатор подгруппы M_δ в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Согласно условию $\min -nnd$, множество $\{M_\delta\}$ имеет минимальный элемент M. Следовательно, M/H — минимальный элемент подмножества $\{M_\delta/H\}$. Поэтому факторгруппа G/H удовлетворяет условию минимальности для нормальных подгрупп. Следовательно, факторгруппа G/H гиперабелева и содержит нетривиальную нормальную абелеву подгруппу. В случае, когда для некоторого $\gamma \in \Sigma$ коцентрализатор подгруппы M_γ в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, подгруппа M_γ разрешима. Поэтому M_γ/H — нетривиальная нормальная разрешимая подгруппа факторгруппы G/H. Следовательно, факторгруппа G/H содержит нетривиальную нормальную абелеву подгруппу, и поэтому группа G гиперабелева.

Пусть $1 = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \cdots \leqslant H_\alpha \leqslant \cdots \leqslant G$ — возрастающий ряд нормальных подгрупп с абелевыми факторами и пусть α — наименьшее порядковое число такое, что коцентрализатор подгруппы H_α в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда, как и ранее, подгруппа H_β разрешима для всех $\beta < \alpha$. Кроме того, факторгруппа G/H_α удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, и поэтому является разрешимой черниковской группой.

Предположим сначала, что α не является предельным порядковым числом. Следовательно, подгруппа H_α разрешима, и поэтому группа G также разрешима. Рассмотрим теперь случай, когда α — предельное порядковое число и группа G не является разрешимой. Для каждого натурального числа k существует такое порядковое число β_k, что $\beta_k < \alpha$, H_{β_k} имеет ступень разрешимости, не превосходящую числа k. Кроме того, можно положить, что $\beta_i < \beta_{i+1}$ для каждого натурального числа i. Пусть $T_i = H_{\beta_i}$ для каждого натурального числа i. Следовательно, $1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \cdots \leqslant \cdots$ — возрастающий ряд нормальных подгрупп группы G. Тогда подгруппа $T_\omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} T_n$ не является разрешимой, и поэтому $T_\omega = H_\alpha$. Требуемый ряд $1 = W_0 \leqslant W_1 \leqslant \cdots \leqslant W_n \leqslant \cdots \leqslant W_\omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} W_n \leqslant G$ может быть получен из ряда $1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_\omega \leqslant G$. Теорема доказана.

1. *Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. – 2004. – **277**, No 1. – P. 172–186.
2. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publ. Math. – 2006. – **50**. – P. 103–131.
3. *Курдаченко Л. А.* О группах с минимаксными классами сопряженных элементов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев. – 1993. – С. 160–177.
4. *Dashkova O. Yu.* On modules over group rings of locally soluble groups with rank restrictions on some systems of subgroups // Asian-Eur. J. Math. – 2010. – **3**, No 1. – P. 45–55.
5. *Дашкова О. Ю.* Модули над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп // Доп. НАН України. – 2009. – № 2. – С. 14–19.
6. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. – New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1973. – 229 p.
7. *Зайцев Д. И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР. – 1974. – **214**, № 6. – С. 1250–1253.

Днепропетровский национальный университет

Поступило в редакцию 01.02.2011

O. Yu. Dashkova

On a class of modules over the group rings of locally soluble groups under the condition min $-nnd$

An $\mathbf{R}G$*-module* A *such that* $\mathbf{R}$ *is an integral ring, a group* G *is locally soluble,* $C_G(A) = 1$*, the quotient module* $A/C_A(G)$ *is not a Noetherian* $\mathbf{R}$*-module, and the system of all subgroups* $H \leqslant G$ *for which the quotient modules* $A/C_A(H)$ *are not Noetherian* $\mathbf{R}$*-modules satisfies the minimal condition on subgroups is studied. This condition is called the condition* min $-nnd$*. Some properties of the group* G *are obtained.*