УДК 517.5

Член-корреспондент НАН Украины **П. М. Тамразов**

Полиномиальная проблема Смейла

Робота присвячена проблемі про найкращу мажорацію характеристики алгоритма, поставлену Стівом Смейлом в 1981 році. В нашій роботі знайдені точні значення самої характеристики алгоритма.

Данная работа посвящена проблеме из теории сложности алгоритмов, поставленной С. Смейлом в 1981 г. [1]. Она сразу привлекла внимание многих специалистов (см. например, [2]).

В конце прошлого столетия вице-президент Международного математического союза (ММС) В. Арнольд обратился от имени ММС к ряду математиков с предложением описать некоторые из великих проблем следующего века. На это предложение Смейл ответил работой [3], в которой он привел список из 18 отобранных нерешенных проблем, начинающийся проблемой Римана. Кроме того, в конце своей работы он привел дополнительный список из трех нерешенных проблем, первой из которых указана рассматриваемая нами его проблема теории сложности.

В работе [3] Смейл пишет: "В наши дни алгоритмы заслуживают анализа сами по себе, а не только как средство решения других проблем. Поэтому я предполагаю, что аналогично тому, как исследование множества решений уравнения (например, многообразия) играло столь важную роль в математике XX века, исследование процесса нахождения решений (например, алгоритма) может играть не менее важную роль в следующем столетии".

Это мнение выдающегося математика, лауреата Филдсовской медали за исследования в топологии и за доказательство знаменитой гипотезы А. Пуанкаре во всех размерностях $n > 4$.

Проблема Смейла. Пусть дан полином f степени $n \geqslant 2$ такой, что $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Существует ли у f такая критическая точка θ (т. е. точка, где $f'(\theta) = 0$), в которой

$$\frac{|f(\theta)|}{|\theta f'(0)|} \leqslant c = 1$$

(или даже $c = (n-1)/n$)?

Мы найдем точное выражение для самой характеристики

$$g(\theta) := \frac{f(\theta)}{\theta f'(0)} \tag{0}$$

алгоритма (она приведена в нашей теореме), а не только верхнюю оценку ее модуля, и наши утверждения касаются всех критических точек.

Пусть f есть алгебраический полином точной степени $n \geqslant 2$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющий простой нуль $\alpha = 0$, необязательно разные критические точки $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ (т. е. $f'(\theta_s) = 0\ \forall\, s$) и старший коэффициент 1 (при z^n).

Обозначим через a_i (с соответствующим множеством значений индекса i) все остальные нули полинома f (отличные от 0 и повторяющиеся соответственно их кратности). Тогда суммарная кратность указанных остальных нулей равна $n-1$ и

$$\frac{f(z)}{z} = \prod_i (z - a_i) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Легко видеть, что

$$f'(0) = \prod_i (-a_i) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения:

$$g_1(z) := \prod_i \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

$$g_2(z) := \sum_i \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Очевидно, значение $g_1(\theta)$ в точности равно характеристике (0) и

$$\frac{f'(z)}{f'(0)} = g_1(z) + g_2(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$g_1(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-z)^k \sum_{i_1,\ldots,i_k} (a_{i_1} \cdots a_{i_k})^{-1} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

$$g_2(z) = \sum_i \left(-\frac{z}{a_i}\right) \left[1 + \sum_{k=1}^{n-2} (-z)^k \sum_{j_1,\ldots,j_k \neq i} (a_{j_1} \cdots a_{j_k})^{-1}\right] \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

в которых $i_1, \ldots, i_k$ и $j_1, \ldots, j_k$ являются множествами индексов типа i, причем второе из них не содержит указанного во второй формуле индекса i.

Доказательство. Лемма 1 следует из формул (1)–(4).

Лемма 2. *Имеют место соотношения:*

$$g_2(z) = \sum_i (-\frac{z}{a_i}) + (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} (-z)^k \sum_{i_1,\ldots,i_k} (a_{i_1} \cdots a_{i_k})^{-1} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

$$g_1(z) + g_2(z) = 1 + \sum_i \left(-\frac{z}{a_i}\right) + n \sum_{k=1}^{n-1} (-z)^k \sum_{i_1,\ldots,i_k} (a_{i_1} \cdots a_{i_k})^{-1} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Доказательство. Из формулы (7) выводим соотношение

$$g_2(z) = \sum_i \left(-\frac{z}{a_i}\right) + \sum_i u_i \sum_{k=1}^{n-1} (-z)^k \sum_{i_1,\ldots,i_k} (a_{i_1} \cdots a_{i_k})^{-1} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

в котором принято $u_i = 1$ для всякого индекса i, а отсюда уже следует формула (8), а с помощью (6) — и формула (9). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для всякой критической точки θ верны соотношения:*

$$1 + \sum_i \left(-\frac{\theta}{a_i}\right) + n \sum_{k=1}^{n-1} (-\theta)^k \sum_{i_1,\ldots,i_k} (a_{i_1} \cdots a_{i_k})^{-1} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-\theta)^k \sum_{i_1,\ldots,i_k} (a_{i_1} \cdots a_{i_k})^{-1} = \frac{1}{n}\left(-1 + \theta \sum_i a_i^{-1}\right).$$

Доказательство. Нужные равенства вытекают из формул (5) и (9).

Справедлива следующая теорема, вытекающая из леммы 3.

Теорема. *Для всякой критической точки θ верно соотношение*

$$g(\theta) = \frac{n-1}{n} + \frac{\theta}{n} \sum_i a_i^{-1}.$$

Верно алгебраическое уравнение относительно θ

$$\prod_i (\theta - a_i) + \theta \sum_i \prod_{j \neq i} (\theta - a_j) = 0 \qquad (10)$$

точной степени $n - 1$, справедливое для всякой критической точки θ.

Левая часть уравнения (10) является полиномом по θ со свободным членом $f'(0)$ и старшим коэффициентом n (при θ^{n-1}). Корнями упомянутого полинома являются все критические точки θ_s (и только они). Поэтому произведение n и всех этих корней, взятых со знаком минус, равно свободному члену:

$$n \prod_s (-\theta_s)) = f'(0).$$

Следовательно, у f существует критическая точка θ_s, для которой величина

$$n(-\theta_s^{n-1})$$

сравнима с величиной и знаком константы $f'(0)$ в ту или иную сторону.

Когда θ — критическая точка f, отличная от нуля функции f, то

$$\frac{1}{\theta} + \sum_i \frac{1}{\theta - a_i} = 0.$$

Если $n = 2$, то

$$0 = f'(\theta) = 1 + 2\theta \sum_i a_i^{-1}$$

и

$$g(\theta) = \frac{2n-3}{2n} = \frac{1}{4}.$$

1. *Smale S.* The fundamental theorem of algebra and complexity theory // Bull. (New Series) Amer. Math. Soc. – 1981. – **4**, No 1. – P. 1–36.
2. *Schmeisser G.* The conjectures of Sendov and Smale // A volume dedicated to Blagovest Sendov / Ed. B. Bojanov. – Sofia: DARBA, 2002. – P. 353–369.
3. *Smale S.* Математические проблемы следующего века // Математика: границы и перспективы: Пер. с англ. – Москва: ФАЗИС, 2005. – С. 419–452.

Институт математики НАН Украины, Киев *Поступило в редакцию 04.05.2011*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **P. M. Tamrazov**

Smale's polynomial problem

The paper is devoted to the problem of the best majorization of an algorithm characteristic posed by Steve Smale in 1981. We have found the exact values of the characteristic itself.