Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2011

УДК 519.6:539.3

© 2011

Академик НАН Украины **И. В. Сергиенко,**
академик НАН Украины **В. С. Дейнека**

Решение некоторых обратных задач теплопроводности для составной пластины с использованием псевдообратных матриц

Розглянуто питання використання псевдообернених матриць для ідентифікації за скінченне число арифметичних дій деяких параметрів стаціонарної задачі теплопровідності для складеної пластини.

Ранее авторами в [1] на основе результатов теории оптимального управления состояния различных многокомпонентных распределенных систем [2] рассматривались вопросы построения явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами [3] различных параметров различных многокомпонентных распределенных систем.

В данной работе рассмотрен вопрос использования псевдообратных матриц для идентификации за конечное число арифметических действий некоторых параметров стационарной задачи теплопроводности для составной пластины.

Восстановление мощностей внутренних источников/стоков. Пусть на противоположных поверхностях слоистой пластины длительное время поддерживается постоянный температурный режим. Тогда установившееся температурное поле может быть описано следующей краевой задачей.

На составной области $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ ($\Omega_1 = (0, \xi)$, $\Omega_2 = (\xi, l)$, $0 < \xi < l < \infty$) определено уравнение теплопроводности

$$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) = u(x), \tag{1}$$

где $k = k(x) \geqslant k_0 > 0$ — коэффициент теплопроводности; $u = u(x)$ — функция источников/стоков, различные для областей Ω_1, Ω_2; $y = y(x)$ — температура тела в точке x; ξ, $l - \xi$ — толщины составляющих составной пластины толщиной l.

В точке $x = \xi$ — координате контакта составляющих тела — условия сопряжения, отражающие непрерывность потока тепла и его пропорциональность скачку температуры, имеют вид:

$$\left[k\frac{dy}{dx}\right] = 0, \qquad \left\{k\frac{dy}{dx}\right\}^{\pm} = r[y], \tag{2}$$

где $[\varphi] = \varphi^{+} - \varphi^{-}$, $\varphi^{\pm} = \{\varphi\}^{\pm} = \varphi(\xi \pm 0)$, $r = \mathrm{const} \geqslant 0$.

Краевые условия следующие:

$$-k\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = -\alpha y(0) + \beta, \qquad k\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=l} = \beta_1, \tag{3}$$

где $u = u(x)$ является неизвестным.

Пусть в точках $d_0 = 0$, $d_i \in \Omega$, $i = \overline{0, \overline{N}}$, известны значения температуры, заданные равенствами:

$$y(d_i) = \overline{f}_i, \qquad i = \overline{0, \overline{N}}. \tag{4}$$

Полученная задача (1)–(4) состоит в определении функции $u = u(x) \in U = \{v(x)\colon v|_{\Omega_i} \in \in C(\Omega_i), i = 1, 2\}$, при которой решение $y = y(u; x)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет равенствам (4). Пусть $y = y(0; x)$ — решение краевой задачи (1)–(3) при $u = 0$. Тогда для определения искомой функции $u \in U$ на основании (1)–(4) получаем задачу, где состояние системы описывается системой

$$\begin{gathered}
-\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) = u(x), \qquad x \in \Omega, \\
\left[k\frac{dy}{dx}\right]\bigg|_{x=\xi} = 0, \qquad \left\{k\frac{dy}{dx}\right\}^{\pm} = r[y], \qquad x = \xi, \\
-k\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = -\alpha y(0), \qquad k\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=l} = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

решение которой удовлетворяет равенствам

$$y(d_i) = f_i, \qquad i = \overline{0, \overline{N}}, \tag{6}$$

где $f_i = \overline{f}_i - y(0; d_i)$, $i = \overline{0, \overline{N}}$.

Пусть $\{\varphi_l^j(x)\}_{l=1}^{m_j}$ — система линейно независимых функций, определенных на области $\Omega_j(\varphi_l^j \in C(\Omega_j))$, $j = 1, 2$, каждую из которых продолжим нулем на соседнюю область Ω_χ, $\chi = \{1, 2\} \setminus j$. Искомую функцию $u(x)$ будем определять в виде

$$u = u_m(x) = \sum_{l=1}^{m} \overline{u}_l \varphi_l(x), \qquad u_m \in U_m \subset U, \qquad \overline{u}_l \in R, \qquad l = \overline{1, m}, \tag{7}$$

где $m = m_1 + m_2$, $\varphi_l = \varphi_l^1$ при $l = \overline{1, m_1}$, $\varphi_l = \varphi_l^2$ при $l = \overline{m_1 + 1, m}$.

При каждом фиксированном $u \in U_m$ вместо классического решения краевой задачи (5) будем использовать ее обобщенное решение, т. е. функцию $y = y(u) = y(u;x) \in H = \{v(x)\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2\}$, которая $\forall\, z(x) \in H$ удовлетворяет равенству

$$a(y,z) = l(u;z). \tag{8}$$

Здесь

$$a(y,z) = \int\limits_{\Omega} k\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}dx + r[y][z] + \alpha y(0)z(0), \qquad l(u;z) = \int\limits_{\Omega} uzdx.$$

С учетом леммы Лакса–Мильграма [4] легко установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *При каждом фиксированном $u \in U$ решение задачи* (8) *существует, единственно и доставляет на H минимум функционалу*

$$\Phi(u;z) = a(z,z) - 2l(z). \tag{9}$$

При каждом фиксированном $u \in U$ каждую из эквивалентных задач (8), (9) можем решить с помощью метода конечных элементов. Для этого каждый из отрезков $[0,\xi]$, $[\xi,l]$ разобьем на элементарные отрезки. Тогда для произвольной функции $v_k^N(x)$, непрерывной на каждой из областей $\overline{\Omega}_l$, $l = 1,2$, и являющейся полным полиномом степени k на каждом из элементарных отрезков, имеем

$$\Phi(u;v_k^N) = a(v_k^N, v_k^N) - 2l(u;v_k^N) = V^{\mathrm{T}}\overline{A}V - 2V^{\mathrm{T}}B(u), \tag{10}$$

где $\overline{A} = \{\overline{a}_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\overline{a}_{ij} = a(\varphi_i^k, \varphi_j^k)$, $\overline{A} = \overline{A}^{\mathrm{T}} > 0$, $\{\varphi_i^N(x)\}_{i=1}^N$ — базис конечно-элементного подпространства функций $H_k^N \subset H$.

При $u = u_m \in U_m$ имеем

$$B(u_m) = \{b_i(u_m)\}_{i=1}^N, \qquad b_i(u_m) = \sum_{l=1}^m \overline{u}_l \int\limits_{\Omega} \varphi_l \varphi_i^k d\Omega. \tag{11}$$

Из условия минимума функционала (10) с учетом (11) для каждого фиксированного $u_m \in U_m$ получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\overline{A}V = \sum_{l=1}^m \overline{u}_l B_l, \tag{12}$$

где $B_l = \{b_{li}\}_{i=1}^N$, $b_{li} = \int\limits_{\Omega} \varphi_l \varphi_i^k d\Omega$.

В силу положительной определенности матрицы $\overline{A}$ решение $V = V(u_m) \in R^N$ задачи (12) существует, единственно и представляется в виде

$$V(u_m) = \sum_{l=1}^m \overline{u}_l V^l, \tag{13}$$

где $V^l \in R^N$ — единственное решение системы линейных алгебраических уравнений (12) при $u = \varphi_l(x)$, т. е. системы

$$\overline{A}V^l = B_l, \qquad l = \overline{1, m}. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть при каждом фиксированном $u = u_m \in U_m$ классическое решение $y = y(u_m)$ краевой задачи (5) имеет непрерывные ограниченные $(k+1)$-е производные на каждом из интервалов $(0, \xi)$, (ξ, l). Тогда для приближенного решения $V_k^N(x) = V_k^N(u_m; x) \in H_k^N$ эквивалентных задач (8), (9) имеет место оценка*

$$\|y - V_k^N\|_{W_2^1} \leqslant ch^k, \tag{15}$$

где $\|\varphi\|^2_{W_2^1} = \sum\limits_{i=1}^{2} \|\varphi\|^2_{W_2^1(\Omega_i)}$; $c = \mathrm{const}$; h — наибольшая из длин всех элементарных отрезков; k — степень полиномов МКЭ.

Если $Au = \{A_i u\}_{i=0}^{\overline{N}}$, $A_i u = y(u; d_i)$, то $V_k^m(u_m; d_i)$ — конечно-элементное приближение $A_i u$, $u = u_m$. С учетом (15) имеем

$$\|Au_m - \overline{V}_k^N(u_m)\| \leqslant c_1 h^k, \tag{16}$$

где $\overline{V}_k^N(u_m) = \{V_k^N(u_m; d_i)\}_{i=0}^{\overline{N}}$.

На основании (7) с учетом (13), (14) получаем дискретную обратную задачу

$$AU = b, \tag{17}$$

где

$$U = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m)^{\mathrm{T}}, \qquad b = (f_0, f_1, \ldots, f_{\overline{N}})^{\mathrm{T}}, \qquad A = \begin{pmatrix} \overline{V}_0^1 & \overline{V}_0^2 & \ldots & \overline{V}_0^m \\ \overline{V}_1^1 & \overline{V}_1^2 & \ldots & \overline{V}_1^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{V}_{\overline{N}}^1 & \overline{V}_{\overline{N}}^2 & \ldots & \overline{V}_{\overline{N}}^m \end{pmatrix},$$

$\overline{V}_i^l = V_k^N(\varphi_l; d_i)$, $i = \overline{0, \overline{N}}$, $l = \overline{1, m}$; A — прямоугольная матрица размерами $(\overline{N} + 1) \times m$.

Известно, что при $\overline{N}+1 = m$ и $\det A \neq 0$ классическое решение U задачи (17) существует, единственно и $U = A^{-1}b$. Если $\det A = 0$ или $\overline{N} + 1 \neq m$, то задача (17) может не иметь классического решения. Тогда рассматривается обобщенное решение U (решение в смысле наименьших квадратов) как вектор, удовлетворяющий равенству

$$\|AU - b\| = \min_{X \in R^m} \|AX - b\|. \tag{18}$$

Известно, что обобщенные решения и только они являются решениями (классическими) всегда совместной системы линейных алгебраических уравнений

$$A^{\mathrm{T}}AU = A^{\mathrm{T}}b, \tag{19}$$

где A^{T} — матрица, транспонированная к A.

Обобщенное решение U, имеющее наименьшую евклидову норму, называется нормальным обобщенным решением, которое всегда существует и единственно [5]. Для системы (17) с матрицей A полного ранга $r_A = \min(\overline{N}+1, m)$ различают два случая. При $\overline{N}+1 < m$ — недоопределенная — система (17) совместна, но имеет неединственное решение. При $\overline{N}+ +1 > m$ — переопределенная — система (17) может быть несовместной.

Следуя [6], единственное нормальное псевдорешение переопределенной системы (17) с матрицей A полного ранга является классическим решением системы (19).

Для недоопределенной системы (17) ее нормальное псевдорешение U из решения y системы $AA^{\mathrm{T}}y = b$ получают так: $U = A^{\mathrm{T}}y$.

Для системы (17) с прямоугольной матрицей A неполного ранга или вырожденной квадратной матрицей A можно использовать сингулярное разложение [7] псевдообратных матриц Мура–Пенроуза A^{+} [8, 9], методы регуляризации А. Н. Тихонова [10, 11], многочленные методы регуляризации и регуляризованные итерационные процессы [12], итерационные процессы высоких скоростей сходимости [13, 14], прямые методы, описанные в [5].

Детальное рассмотрение вопросов построения нормальных обобщенных решений систем линейных алгебраических уравнений (17) с прямоугольными матрицами размерами $(\overline{N}+ +1)\times m$ и с квадратными вырожденными матрицами на основе сингулярного разложения проведено, например, в работах [7, 15].

Следует отметить, что матрица A системы линейных алгебраических уравнений (17) есть дискретное приближение оператора $\overline{A}$, порожденного задачей (8) при $u = u_m(x) = = \sum\limits_{l=1}^{m} \overline{u}_l \varphi_l(x) \in U_m$. Столбцы $\overline{A}^l$, $l = \overline{1,m}$, оператора $\overline{A}$ образуют векторы Y^l, элементы которых являются значениями в точках d_i, $i = \overline{0,\overline{N}}$, решения $y^l(x)$ задачи

$$a(y^l, z) = l(\varphi_l; z), \qquad \forall\, z \in H_0, \qquad l = \overline{1,m}.$$

Столбцы $\overline{V}^l$ длины $\overline{N}+1$, образованные из решения V^l задачи (5), элементы которых являются значениями конечно-элементных решений в точках d_i, $i = \overline{0,\overline{N}}$, образуют матрицу A. В силу того, что оператор A построен по методу конечных элементов, он аппроксимирует оператор $\overline{A}$ с некоторой погрешностью E_A, а вектор b, где $b_i = f_i$, $i = \overline{0,\overline{N}}$, заданный с погрешностью δ, т. е. вектор b системы (17) имеет общую погрешность E_b.

В работах [10, 11] рассмотрен вопрос получения нормального псевдорешения U системы (17) с действительной прямоугольной или квадратной вырожденной матрицей A на основе решения системы линейных алгебраических уравнений

$$(A^{\mathrm{T}}A + \alpha E)U_\alpha = A^{\mathrm{T}}b,$$

где $A^{\mathrm{T}}A + \alpha E$ — симметричная положительно определенная матрица, $\alpha > 0$.

Одновременная идентификация теплового потока и мощности внутреннего источника/стока. Пусть состояние системы описывается дифференциальным уравнением (1), краевыми условиями

$$-k\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = -\alpha y(0) + \beta, \qquad k\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=l} = u_1 \tag{20}$$

и условиями сопряжения в точке $x = \xi$

$$[y] = 0, \qquad \left[k\frac{dy}{dx}\right] = u_2, \tag{21}$$

где u_1, u_2 считаем неизвестными.

Предполагаем, что в точках d_i, $i = \overline{0, \overline{N}}$, известны значения решения задачи (1), (20), (21), заданные равенствами (4).

Аналогично предыдущему случаю, от задачи (1), (20), (21), (4) перейдем к следующей задаче. Состояние системы описывается равенствами:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) = 0, \qquad x \in \Omega,\\
&-k\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = -\alpha y(0), \qquad k\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=l} = u_1,\\
&[y] = 0, \qquad \left[k\frac{dy}{dx}\right] = u_2,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где

$$
y(d_i) = f_i, \qquad i = \overline{0, \overline{N}}. \tag{23}
$$

Обобщенная задача, соответствующая краевой задаче (22), состоит в поиске функции $y = y(u) = y(u; x) \in H = \{v(x) \colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), i = 1, 2,\ [v] = 0\}$, которая $\forall\, z \in H$ удовлетворяет равенству вида (8), где

$$
a(y, z) = \int\limits_{\Omega} k\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}dx + \alpha y(0)z(0), \qquad l(u; z) = u_1 z(l) - u_2 z(\xi).
$$

Справедливы теорема, аналогичная теореме 1, и представления вида (10)–(14), где $m = 2$, $B_l = \{b_{li}\}_{i=1}^N$, $l = 1, 2$; $b_{1i} = u_1\varphi_i^k(l)$, $b_{2i} = -u_2\varphi_i^k(\xi)$, $u = (u_1, u_2) \in U = R \times R$. Имеет место теорема, аналогичная теореме 2, и справедлива оценка вида (16).

В результате получаем дискретную обратную задачу

$$
AU = b, \tag{24}
$$

где

$$
U = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}, \qquad b = (f_0, f_1, \ldots, f_{\overline{N}})^{\mathrm{T}}, \qquad A = \begin{pmatrix} \overline{V}_0^1 & \overline{V}_0^2 \\ \overline{V}_1^1 & \overline{V}_1^2 \\ \ldots & \ldots \\ \overline{V}_{\overline{N}}^1 & \overline{V}_{\overline{N}}^2 \end{pmatrix},
$$

$$
\overline{V}_i^l = V_k^N(\varphi_l; d_i), \qquad i = \overline{0, \overline{N}}, \qquad l = 1, 2; \qquad \varphi_1 = (1, 0), \qquad \varphi_2 = (0, 1).
$$

Относительно системы (24) справедливы все замечания, высказанные в предыдущем пункте для системы (17).

Таким образом, в работе представлена технология идентификации плотностей тепловых потоков, внутренних источников путем псевдообращения матриц, полученных на основе метода конечных элементов. Идентификации проводится за конечное число арифметических действий с возможностью естественного распараллеливания.

1. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – Киев: Наук. думка, 2009. – 640 с.

2. *Sergienko I. V., Deineka V. S.* Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. – New York: Kluwer, 2005. – 400 p.
3. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1988. – 288 с.
4. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – Москва: Мир, 1980. – 512 с.
5. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – Москва: Наука, 1977. – 223 с.
6. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры. – Москва: Наука, 1977. – 304 с.
7. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. – Москва: Наука, 1986. – 232 с.
8. *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstract. Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – **26**. – P. 394–395.
9. *Penrose R. A.* A generalized inverse for matrices // Proc. Camridge Phil. Soc. – 1955. – **51**, No 3. – P. 406–413.
10. *Тихонов А. Н.* Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных линейных алгебраических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1965. – **5**, № 4. – С. 718–722.
11. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1979. – 288 с.
12. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2007. – **47**, № 5. – С. 747–766.
13. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Итерационные методы высоких скоростей сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Там же. – 2005. – **45**, № 10. – С. 1731–1755.
14. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами // Там же. – 2009. – **49**, № 8. – С. 1347–1363.
15. *Химич А. Н., Молчанов И. Н., Попов А. В. и др.* Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. – Киев: Наук. думка, 2008. – 248 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 11.05.2011

Academician of the NAS of Ukraine **I. V. Sergienko,**
Academician of the NAS of Ukraine **V. S. Deineka**

Solution of some inverse heat conduction problems for a compound plate using pseudoinverse matrices

The question of the use of pseudoinverse matrices for the identification of some parameters of the heat conduction stationary problem for a compound plate during a finite number of arithmetic operations is considered.