



УДК 539.3

© 2011

**В. М. Быстров, В. С. Зеленский, В. В. Ясинский**

**О влиянии геометрических характеристик покрытия  
на затухание краевого эффекта при одноосном  
продольном сжатии слоистого композитного материала**

*(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)*

*Розглядається задача визначення зони крайового ефекту у шаруватому композитному матеріалі з тонким ізотропним покриттям при одноосному поздовжньому стисканні матеріалу. Для представницького елемента матеріалу досліджується залежність максимальної протяжності зони крайового ефекту та характеру згасання крайового ефекту від співвідношення між геометричним параметром структури матеріалу та товщиною покриття. Аналіз крайового ефекту здійснюється на основі чисельного розв'язку крайової задачі теорії пружності неоднорідних тіл та кількісних критеріїв згасання крайового ефекту для нормальних напружень.*

Одной из актуальных проблем механики композитов является исследование краевых эффектов в композитных материалах с учетом их структурной неоднородности, которая обусловлена микроструктурой материала и наличием тонкого покрытия, толщина которого соизмерима с геометрическими параметрами структуры материала и, в частности, с толщиной армирующих компонентов. В дальнейшем под тонким покрытием будем понимать покрытие, толщина которого равна или меньше характерного размера армирующего компонента. В данной работе таким характерным размером является толщина слоя наполнителя.

В работах [1, 2] в рамках модели кусочно-однородной среды рассмотрен вопрос о затухании краевого эффекта в слоистом композитном материале при наличии тонкого изотропного покрытия, расположенного перпендикулярно слоям. Исследован случай одноосного продольного сжатия материала кусочно-постоянной нагрузкой при изменении ее периода для конкретных значений геометрических и механических характеристик материала и покрытия. Упругие характеристики покрытия полагались равными упругим характеристикам наполнителя. Показано, что основной вклад в увеличение зоны краевого эффекта при изменении периода поверхностной нагрузки вносит наличие в расчетной области одного ненагруженного слоя наполнителя, что соответствует периоду нагрузки, равному двум параметрам структуры материала. Для таких условий нагружения в работе [3] исследован

вопрос о влиянии упругих характеристик покрытия на длину затухания краевого эффекта в слоистом композитном материале с покрытием.

В данной работе исследовано влияние геометрических характеристик покрытия на максимальную длину затухания краевого эффекта и характер затухания краевого эффекта в компонентах материала. Исследования предполагают проведение вычислительного эксперимента для определения представительного элемента слоистого материала с покрытием при фиксированных значениях геометрического параметра структуры материала и толщины покрытия. В работе развивается подход к определению краевых эффектов, базирующийся на использовании модели кусочно-однородной среды, уравнений линейной теории упругости и количественных критериев затухания краевых эффектов [4, 5], а также подход к численному решению соответствующих краевых задач с применением метода сеток в рамках концепции базовой схемы [6, 7].

**Постановка задачи.** Для представительного элемента материала с покрытием исследуется влияние геометрических характеристик покрытия на параметры затухания краевого эффекта и характер затухания краевого эффекта в компонентах слоистого композитного материала. Для анализа затухания краевого эффекта используется функция затухания напряжений [2].

Представительный элемент наследует структуру материала на соответствующем уровне рассмотрения его неоднородности и определяет переход на следующий структурный уровень исследования упругого поведения неоднородных материалов. При этом материал, которому в общем случае соответствуют неограниченная или полуограниченная область, моделируется расчетной областью конечных размеров. Для соответствующей расчетной области в случае плоской задачи имеют место следующие соотношения:  $L \gg H_{\Pi} > \lambda_{\rho} \gg h$ ,  $\lambda_{\rho} \sim b_{\Pi}$ . Здесь  $h$  — геометрический параметр, характеризующий структурную неоднородность материала (например, поперечный размер армирующих компонентов или толщина покрытия);  $L$  — геометрическая характеристика расчетной области, которая соответствует масштабному уровню, когда возможно использование континуального подхода;  $b_{\Pi}$ ,  $H_{\Pi}$  — размеры представительного элемента в направлении  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , соответственно;  $\lambda_{\rho}$  — максимальная длина затухания краевого эффекта, определенная с точностью  $\rho\%$  (максимальная протяженность зоны краевого эффекта в направлении  $Ox_2$ , соответствующая некоторому значению координаты  $x_1$ ).

Размеры  $b_{\Pi}$ ,  $H_{\Pi}$  представительного элемента материала определяются на основе вычислительного эксперимента, исходя из условия установившегося значения  $\lambda_{\rho}/b$  при увеличении размеров  $b$  и  $H$  расчетной области в направлении  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , соответственно (рис. 1). Это условие может быть представлено следующим образом:

$$\left. \frac{\lambda_{\rho}(b)}{b} \right|_{b \geq b_{\Pi}, H \geq H_{\Pi}} = \text{const}_{\rho}, \quad b = nh, \quad n = \overline{1, N_{\Pi}}, \quad (1)$$

где  $n$  — количество расчетных элементов в расчетной области;  $N_{\Pi}$  — количество расчетных элементов в расчетной области, соответствующей представительному элементу материала. Изменение периода нагрузки  $b = nh$  соответствует изменению количества  $n$  расчетных элементов в расчетной области  $\overline{\Omega}$ .

Рассмотрим задачу о затухании краевого эффекта в слоистом композитном материале с покрытием для случая одноосного продольного сжатия материала поверхностной кусочно-постоянной периодической нагрузкой (см. рис. 1). Нагрузка прикладывается к слою покрытия и действует в плоскости размещения слоев наполнителя в направлении оси  $Ox_2$ :

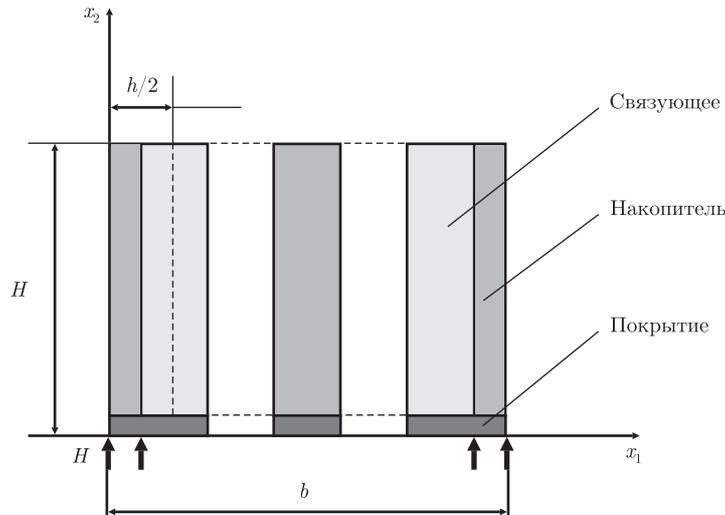


Рис. 1. Геометрия расчетной области и условия нагружения

$p(x_1, 0) = p^0$ ,  $|x_1| \leq 0,5h_n + kb_n$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Период  $b_n$  поверхностной нагрузки кратен параметру  $h = h_n + h_c$ , где  $h_n$ ,  $h_c$  — соответственно, толщина слоя наполнителя и связующего и определяет размер расчетной области  $\bar{\Omega}_n$  в направлении оси  $Ox_1$ . Эта расчетная область соответствует представителю элементу материала. Вдоль оси  $Ox_3$  нагрузка не изменяется.

Затухание краевого эффекта будем исследовать с использованием функции затухания напряжений  $\tilde{\rho}(x)$ . Эта функция характеризует в процентном отношении изменение нормальных напряжений в зоне краевого эффекта по сравнению с напряжениями в области установившегося напряженного состояния для самоуравновешенной нагрузки при изменении расстояния от линии приложения нагрузки. Эта функция может быть представлена таким образом:

$$\tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}(x_1, x_2) = 100 \cdot \frac{\sigma_{22}(x_1, x_2) - \sigma_{уст}(x_1, H_n)}{f(x_1, 0)}, \quad x \in \bar{\Omega}_n, \quad (2)$$

где  $f(x_1, 0) = p(x_1, 0) - \sigma_{уст}(x_1, H_n)$  — самоуравновешенная функция нагрузки;  $\sigma_{уст}$  — нормальные напряжения  $\sigma_{22}$ , которые устанавливаются в расчетной области при затухании краевого эффекта. Значение координаты  $x_2$ , для которой функция затухания напряжений  $\tilde{\rho}(x_1, x_2)$  принимает некоторое значение  $\rho$  при фиксированном значении координаты  $x_1$ , может рассматриваться как длина затухания  $\lambda_\rho$  краевого эффекта в направлении оси  $Ox_2$ , определенная с точностью  $\rho\%$ .

Напряжения  $\sigma_{22}$  определим из решения соответствующей краевой задачи для расчетной области  $\bar{\Omega}_n$ . Граничные условия краевой задачи на участке  $\{0 \leq x_1 \leq b/2, x_2 = 0\}$  границы расчетной области определяют поверхностную нагрузку, которой ставится в соответствие самоуравновешенная функция нагрузки. На участках  $\{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H\}$  и  $\{x_1 = b/2, 0 \leq x_2 \leq H\}$  границы расчетной области граничные условия соответствуют периодическому характеру напряженного состояния и являются смешанными однородными условиями. Граничные условия на участке  $\{0 \leq x_1 \leq b, x_2 = H\}$  границы не допускают перемещения и вращения расчетной области как целого и также являются смешанными однородными условиями. Условия сопряжения между слоями материала

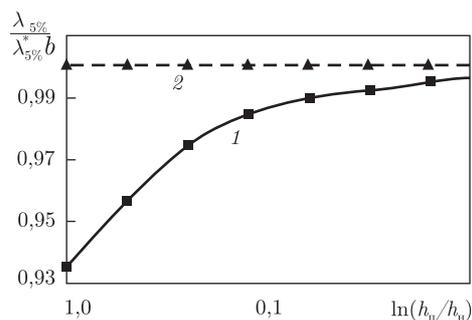


Рис. 2. Зависимость длины затухания  $\lambda_{5\%}$  краевого эффекта от толщины  $h_{\text{п}}$  (логарифмическая шкала) покрытия для периода поверхностной нагрузки  $b/h = 10$ : кривая 1 — материал с покрытием; кривая 2 — материал без покрытия;  $h_{\text{н}}$  — толщина слоя наполнителя;  $\lambda_{5\%}^*$  — длина затухания краевого эффекта для материала без покрытия

ла, а также между слоями материала и слоем покрытия соответствуют идеальному контакту.

**Анализ результатов расчета.** Расчеты проводились для следующих значений упругих и геометрических характеристик компонент материала:  $E_{\text{н}}/E_{\text{с}} = 100$ ,  $E_{\text{п}} = E_{\text{н}}$ ,  $\nu_{\text{н}} = \nu_{\text{с}} = \nu_{\text{п}} = 0,3$ , где  $E_{\text{н}}$ ,  $\nu_{\text{н}}$ ,  $E_{\text{с}}$ ,  $\nu_{\text{с}}$  и  $E_{\text{п}}$ ,  $\nu_{\text{п}}$  — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона наполнителя, связующего и покрытия;  $c_{\text{н}} = h_{\text{н}}/(h_{\text{н}} + h_{\text{с}}) = 0,5$  — концентрация наполнителя,  $h_{\text{н}} = h_{\text{с}}$ . Определение представительного элемента слоистого материала с покрытием и анализ затухания краевого эффекта осуществлялся для следующих значений величины отношения толщины покрытия и толщины слоя наполнителя:  $h_{\text{п}}/h_{\text{н}} = 1$ ; 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125; 0,15625; 0,078125.

На рис. 2 представлена зависимость длины затухания  $\lambda_{5\%}$  краевого эффекта от толщины  $h_{\text{п}}$  покрытия для периода поверхностной нагрузки  $b/h = 10$ , которая соответствует представительному элементу материала с наименьшей толщиной покрытия. В этом случае соответствующая расчетная область характеризуется наибольшими размерами, а указанная зависимость является установившейся относительно дальнейшего увеличения периода нагрузки. Результаты расчета параметров затухания краевого эффекта для такой области могут быть использованы для исследования материала с покрытием на макромеханическом уровне рассмотрения.

Как видно из рисунков, при уменьшении толщины покрытия длина затухания краевого эффекта увеличивается асимптотически, оставаясь меньшей по величине, чем длина затухания краевого эффекта в материале без покрытия. Этот факт объясняется тем, что при уменьшении толщины покрытия увеличивается влияние на затухание краевого эффекта структурной неоднородности слоистого материала, с которой связана анизотропия материала. Как следствие, возрастание анизотропии приводит к увеличению длины затухания краевого эффекта.

На рис. 3, 4 показано изменение функции затухания напряжений вдоль оси  $Ox_2$  в слое наполнителя (сечение  $x_2 = b_{\text{п}}/2$ ) для различных толщин покрытия; кривая 1 соответствует материалу без покрытия [8, 9]. Для указанного сечения достигается максимальная протяженность зоны краевого эффекта в материале. Как видно из графической информации, уменьшение толщины покрытия приводит к увеличению значения функции затухания напряжений для соответствующих значений координаты  $x_2$  вдоль линии затухания краевого эффекта. Характер поведения функции затухания напряжений является одинаковым для

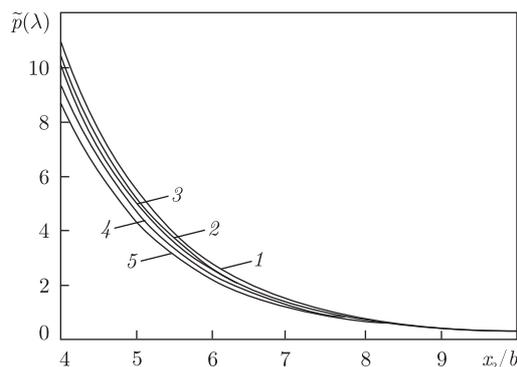


Рис. 3. Функция затухания напряжений вдоль оси  $Ox_2$  в слое наполнителя (сечение  $x_2 = b_n/2$ ) для различных значений толщины покрытия; кривая 1 — материал без покрытия; кривая 2 —  $h_n/h_n = 0,125$ ; кривая 3 —  $h_n/h_n = 0,25$ ; кривая 4 —  $h_n/h_n = 0,5$ ; кривая 5 —  $h_n/h_n = 1,0$

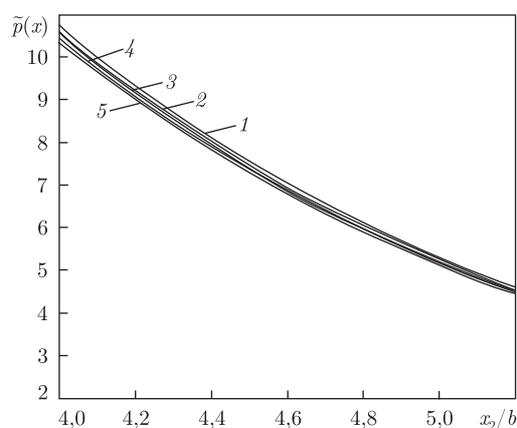


Рис. 4. Функция затухания напряжений вдоль оси  $Ox_2$  в слое наполнителя (сечение  $x_2 = b_n/2$ ) для различных значений толщины покрытия: кривая 1 — материал без покрытия; кривая 2 —  $h_n/h_n = 0,0625$ ; кривая 3 —  $h_n/h_n = 0,3125$ ; кривая 4 —  $h_n/h_n = 0,015625$ ; кривая 5 —  $h_n/h_n = 0,0078125$

различных значений толщины тонкого покрытия в исследованном диапазоне изменения толщины покрытия.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы относительно влияния геометрических характеристик покрытия на зоны краевого эффекта.

При уменьшении толщины покрытия длина затухания краевого эффекта увеличивается асимптотически, оставаясь меньше по величине, чем длина затухания краевого эффекта в материале без покрытия. Характер поведения функции затухания напряжений является одинаковым для различных значений толщины тонкого покрытия в исследованном диапазоне изменения толщины покрытия.

1. Быстров В. М. О влиянии тонкого изотропного покрытия на затухание краевого эффекта при одноосном продольном сжатии слоистого композитного материала // Доп. НАН України. — 2008. — № 2. — С. 59–63.
2. Быстров В. М., Зеленский В. С. Затухание краевого эффекта в слоистом композитном материале с тонким изотропным покрытием // Теорет. и прикл. механика. — 2008. — Вып. 44. С. 96–101.
3. Быстров В. М., Зеленский В. С. О влиянии упругих характеристик покрытия на затухание краевого эффекта при одноосном продольном сжатии слоистого композитного материала // Доп. НАН України. — 2010. — № 9. — С. 45–48.

4. Головчан В. Т., Гузь А. Н., Кокханенко Ю. В., Куц В. И. Численные методы // Механика композитов: В 12-ти т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 1. – Киев: Наук. думка, 1993. – 454 с.
5. Бойчук В. Ю., Гузь А. Н., Ясинский В. В. Плоская задача о краевых эффектах в композите, слабоармированном прямоугольными волокнами // Доп. НАН України. – 2000. – № 8. – С. 52–55.
6. Григоренко Я. М., Шевченко Ю. В., Василенко А. Т. и др. Численные методы // Механика композитов: В 12-ти т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 11. – Киев: А. С. К., 2002. – 448 с.
7. Guz A. N., Kokhanenko Yu. V. Numerical solution of three-dimensional stability problems for elastic bodies // Intern. Appl. Mech. – 2001. – **37**, No 11. – P. 1369–1399.
8. Быстров В. М. Затухание краевого эффекта Сен-Венана в слоистом композитном материале при наличии ненагруженных слоев наполнителя // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 53–57.
9. Kokhanenko Yu. V., Bystrov V. M. Edge effect in a laminated composite with longitudinally compressed laminae // Intern. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No 8. – P. 922–927.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 28.03.2011*

**V. M. Bystrov, V. S. Zelensky, V. V. Yasinsky**

**On the influence of geometric characteristics of a coating on the decay of the edge effect under a uniaxial longitudinal compression of a layered composite**

*The problem of determination of the end effect zone in a laminated composite with a thin isotropic covering is considered under a uniaxial longitudinal pressing. For a representative element of a material, the dependence of the maximum length and the character of end effect decay in components of a material on the ratio between the geometrical parameter of the structure of a material and the thickness of a covering is investigated. A numerical solution of the boundary-value problem of elasticity theory of inhomogeneous bodies and quantitative criteria of decay of the end effect for normal stresses are used for the analysis of the end effect.*