

Д. М. Ли́ла, академик НАН Украины А. А. Мартынюк

О потере устойчивости вращающегося упруго-пластического кругового диска

У рамках теорії малих пружно-пластичних деформацій запропоновано спосіб розрахунку методом малого параметра можливої втрати стійкості плоского кругового диска, що обертається. Підтверджено формулу для обчислення критичної кутової швидкості обертання диска із нестискуваного матеріалу.

Упруго-пластическое деформированное состояние сплошного вращающегося диска характеризуется тем, что в его внешней кольцевой области образуется упругая, внутри же — пластическая зона. Разрушению материала быстро вращающегося диска предшествует потеря устойчивости, проявляющаяся в принятии диском плоской формы равновесия, отличной от начальной круговой. Вопрос об определении критической угловой скорости вращения для круглых дисков из несжимаемого материала и изучение потери несущей способности сплошных дисков рассматривается в работах [1, 2] и др. В данной работе излагается основанный на методе возмущений [3] способ определения критической скорости вращения однородного и изотропного плоского кругового диска при произвольном коэффициенте Пуассона.

Постановка задачи. Следуя Д. Д. Ивлеву и Л. В. Ершову [1–3], рассмотрим случай, когда уравнение внешней границы диска после потери устойчивости с точностью до бесконечно малых первого порядка может быть представлено в виде

$$r = a + d \cos n\theta, \quad n \geq 2, \quad d = \text{const},$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta, \tag{1}$$

где a — радиус невозмущенного диска (радиус контурной окружности); $\rho = r/a$ — безразмерный текущий радиус; δ — малый параметр; $n \in \mathbb{N}$; θ — полярный угол (рис. 1).

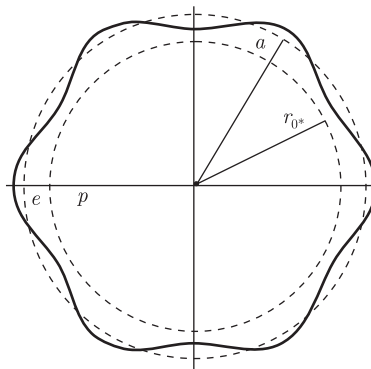


Рис. 1. Потеря устойчивости как результат действия центробежных сил инерции

Предел текучести материала диска обозначим σ_s , модуль упругости — E , плотность — γ , коэффициент Пуассона — ν , угловую скорость вращения — ω , текущий радиус пластической зоны — r_0 .

Требуется для описываемой зависимостью (1) формы потери устойчивости диска получить в первом приближении характеристическое уравнение для критического радиуса пластической зоны r_{0*} и определить соответствующую величину критической угловой скорости вращения ω_* .

Невозмущенное упруго-пластическое состояние вращающегося диска. Вначале проинтегрируем уравнение равновесия [4]

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma}{a^2}r, \quad (2)$$

где

$$\sigma = \gamma a^2 \omega^2,$$

при $r \in [0, r_0]$, т. е. в пластической области. Основываясь на условии текучести из теории наибольшего касательного напряжения

$$\sigma_{\theta\theta} = 2k_p = \sigma_s,$$

имеем

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}}{r} = \frac{2k_p}{r} - \frac{\sigma}{a^2}r.$$

Общим решением этого линейного неоднородного уравнения является

$$\sigma_{rr} = \frac{C}{r} + 2k_p - \frac{\sigma}{3a^2}r^2. \quad (3)$$

При $r = 0$, по условию задачи, $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, поэтому на основании (3) $C = 0$. Таким образом, соответствующее частное решение уравнения (3) имеет вид

$$\sigma_{rr} = 2k_p - \frac{\sigma}{3a^2}r^2. \quad (4)$$

Вместе с этим

$$\sigma_{\theta\theta} = 2k_p. \quad (5)$$

В упругой зоне компоненты напряжения можно искать в виде [4]

$$\sigma_{rr} = k_e \left(C + \frac{\sigma(\nu + 3)}{8k_e} - C \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma(\nu + 3)}{8} \frac{r^2}{a^2}, \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = k_e \left(C + \frac{\sigma(\nu + 3)}{8k_e} + C \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma(3\nu + 1)}{8} \frac{r^2}{a^2}. \quad (7)$$

При этом из условия текучести (постоянство интенсивности напряжений) следует, что $\sqrt{3}k_e = \sigma_s$, а константа C подлежит определению.

Введем обозначение $\beta_0 := r_0/a$ и используем условие непрерывности компонент напряжения при переходе через границу $r = r_0$. Приравнивая правые части в (4) и (6), а также в (5) и (7), при $r = r_0$ получим

$$k_e C(1 - \beta_0^{-2}) + \frac{\sigma(\nu + 3)}{8}(1 - \beta_0^2) = 2k_p - \frac{\sigma}{3}\beta_0^2, \quad (8)$$

$$k_e C(1 + \beta_0^{-2}) + \frac{\sigma}{8}(\nu + 3 - (3\nu + 1)\beta_0^2) = 2k_p. \quad (9)$$

Выразив из соотношения (9) $k_e C$ в виде

$$k_e C = \frac{2k_p - \frac{\sigma}{8}(\nu + 3 - (3\nu + 1)\beta_0^2)}{1 + \beta_0^{-2}} \quad (10)$$

и подставив в (8), после некоторых упрощений и учета определения σ (см. (2)) получаем

$$\frac{\sigma}{2k_p} = \frac{\omega^2}{q^2} = \frac{24}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2}, \quad (11)$$

где

$$q = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}}.$$

Возвращаясь к (10), теперь имеем

$$c := \frac{k_e C}{\sigma_s} = \frac{(3\nu + 1)\beta_0^4}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2}. \quad (12)$$

Таким образом, отнесенные к σ_s величины компонент напряжения невозмущенного кругового диска в упругой области имеют с учетом (11), (12) следующий вид:

$$\sigma_{\rho\rho}^{0e} = c \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{\nu + 3}{8} \frac{\omega^2}{q^2} (1 - \rho^2), \quad (13)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{0e} = c \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{1}{8} \frac{\omega^2}{q^2} (\nu + 3 - (3\nu + 1)\rho^2). \quad (14)$$

Примем их за нулевое приближение к решению задачи о пластическом равновесии, определяющему положение упруго-пластической границы.

Первое приближение граничных условий и условий сопряжения. Поскольку возмущение контурной окружности диска характеризует малый параметр δ (см. (1)), то искомое решение при потере устойчивости диска также будет зависеть от δ . Если искать решение в виде рядов по степеням этого параметра, то, производя линеаризацию, можно развить метод последовательных приближений. Для этого нам понадобятся граничные условия в напряжениях и условия сопряжения решений в полярных координатах с учетом осевой симметрии в пластической зоне. Конкретизируем некоторые этапы получения этих условий.

Согласно [3], для любой компоненты напряжения σ_μ возмущенного диска

$$\sigma_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_\mu^{(n)}. \quad (15)$$

Но

$$\sigma_\mu^{(n)} = \sigma_\mu^{(n)}(r) = \sigma_\mu^{(n)}(r^{(0)} + \Delta r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m \sigma_\mu^{(n)}(r^{(0)})}{dr^m} (\Delta r)^m. \quad (16)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} r &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n r^{(n)}(\theta) = r^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n r^{(n)} = r^{(0)} + \delta \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} r^{(n)} = r^{(0)} + \delta \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n r^{(n+1)} = \\ &= r^{(0)} + \delta \bar{r}, \end{aligned}$$

то

$$\Delta r = \delta \bar{r}$$

и в соответствии с (16)

$$\sigma_\mu^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \frac{d^m \sigma_\mu^{(n)}(r^{(0)})}{dr^m} \frac{\bar{r}^m}{m!}. \quad (17)$$

После подстановки (17) в (15) имеем

$$\sigma_\mu = \sum_{m,n=0}^{\infty} \delta^{m+n} \frac{d^m \sigma_\mu^{(n)}(r^{(0)})}{dr^m} \frac{\bar{r}^m}{m!}. \quad (18)$$

Разлагая в ряд по $\delta \bar{r}$ соответствующие контурные усилия P_μ , получим:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \delta^{m+n} \frac{d^m \sigma_\mu^{(n)}(r^{(0)})}{dr^m} \frac{\bar{r}^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \frac{d^m P_\mu(r^{(0)})}{dr^m} \frac{\bar{r}^m}{m!}. \quad (19)$$

Отсюда при $m+n=1$ слева и $m=1$ справа в первом приближении получаем

$$\sigma_\mu^{(1)}(r^{(0)}) + \frac{d\sigma_\mu^{(0)}(r^{(0)})}{dr} \bar{r} = \frac{dP_\mu(r^{(0)})}{dr} \bar{r},$$

где для соответствия степеней параметра δ следует ограничиться в \bar{r} единственным нулевым членом $r^{(1)}$.

Далее перейдем по (1.230) [3] к основной системе координат, сохраняя (с учетом разложений (1.235)) только слагаемые с δ^0 и δ^1 :

$$\sigma_n = \sigma_{rr} - 2\delta\sigma_{r\theta}\dot{R}_1, \quad \sigma_\tau = -\delta(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})\dot{R}_1 + \sigma_{r\theta}, \quad (20)$$

где $R_1 = r^{(1)}/r^{(0)}$, σ_n и σ_τ — соответственно, нормальная и касательная компоненты напряжения, а точкой обозначено дифференцирование по θ . Переписав (19) в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n=0}^{\infty} \delta^{m+n} \frac{d^m \sigma_\mu^{(n)}(r^{(0)})}{dr^m} \frac{1}{m!} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{\infty} \delta^{k_1 + \dots + k_m} r^{(k_1+1)} \dots r^{(k_m+1)} = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \frac{d^m P_\mu(r^{(0)})}{dr^m} \frac{1}{m!} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{\infty} \delta^{k_1 + \dots + k_m} r^{(k_1+1)} \dots r^{(k_m+1)} \end{aligned} \quad (21)$$

на основании (20), (21) для σ_n получим

$$\begin{aligned} & \sigma_{rr}^{(0)}(r^{(0)}) - 2\delta \sigma_{r\theta}^{(0)}(r^{(0)}) \dot{R}_1(r^{(0)}) + \delta \left(\sigma_{rr}^{(1)}(r^{(0)}) - 2\delta \sigma_{r\theta}^{(1)}(r^{(0)}) \dot{R}_1(r^{(0)}) + \right. \\ & \left. + r^{(1)} \left(\frac{d\sigma_{rr}^{(0)}(r^{(0)})}{dr} - 2 \frac{d\sigma_{r\theta}^{(0)}(r^{(0)})}{dr} \delta \dot{R}_1(r^{(0)}) - 2\sigma_{r\theta}^{(0)}(r^{(0)}) \left(\frac{1}{r^{(0)}} \right) \right) \right) = \\ & = P_\mu(r^{(0)}) + \delta \frac{dP_\mu(r^{(0)})}{dr} r^{(1)}. \end{aligned}$$

Отсюда после приравнивания коэффициентов при δ^1 с учетом соотношения $\sigma_{r\theta}^{(0)}(r^{(0)}) = 0$ получим первое граничное условие

$$\sigma_{rr}^{(1)}(r^{(0)}) + \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}(r^{(0)})}{dr} r^{(1)} = \frac{dP_\mu(r^{(0)})}{dr} r^{(1)}. \quad (22)$$

Аналогичные рассуждения для σ_τ приводят ко второму граничному условию

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}(r^{(0)}) - (\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r^{(0)}) - \sigma_{rr}^{(0)}(r^{(0)})) \dot{R}_1 = \frac{dP_\tau(r^{(0)})}{dr} r^{(1)}. \quad (23)$$

В данной постановке контурная окружность $\rho = 1$ свободна от каких-либо внешних усилий ($P_\mu = P_\tau = 0$), поэтому соотношениям (22), (23) можно придать вид

$$\sigma_{\rho\rho}^{\prime e} + \frac{d\sigma_{\rho\rho}^{0e}}{d\rho} u^{\prime e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (24)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{\prime e} - (\sigma_{\theta\theta}^{0e} - \sigma_{\rho\rho}^{0e}) \frac{du^{\prime e}}{d\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (25)$$

где штрихом обозначены соответствующие возмущения первого порядка малости в линеаризованных граничных условиях, причем $u^{\prime e}$ — возмущение радиального смещения, отнесенное к a .

Чтобы получить линеаризованные условия сопряжения, учтем непрерывность компонент перемещений $u := u_\rho$, $v := u_\theta$ при переходе через границу пластической и упругой областей, т. е. выполнение соотношений $[u] = [v] = 0$ при $\rho = \beta_0$, где квадратными скобками обозначен прыжок соответствующей функции. Основываясь на предыдущих рассуждениях, получим

$$\left[u'(\beta_0) + \frac{du^{(0)}(\beta_0)}{d\rho} u' \right] = 0, \quad \left[v'(\beta_0) + \frac{dv^{(0)}(\beta_0)}{d\rho} u' \right] = 0,$$

откуда с учетом равенства $\frac{du^{0p}(\beta_0)}{d\rho} = \varepsilon_{\rho}^{0p}(\beta_0) = \varepsilon_{\rho}^{0e}(\beta_0) = \frac{du^{0e}(\beta_0)}{d\rho}$ будем иметь

$$u'^e = u'^p, \quad v'^e = v'^p \quad \text{при} \quad \rho = \beta_0. \quad (26)$$

На основании (24), записанного в виде $\left[\sigma'_{\rho\rho}(\beta_0) + \frac{d\sigma_{\rho\rho}^{(0)}(\beta_0)}{d\rho} u' \right] = 0$, с учетом (26) и равенства при $\rho = \beta_0$ радиальной скорости изменения упругой и пластической компонент невозмущенного напряжения $\sigma_{\rho\rho}^{(0)}$ будем иметь

$$\sigma_{\rho\rho}^{\prime e} = \sigma_{\rho\rho}^{\prime p} \quad \text{при} \quad \rho = \beta_0. \quad (27)$$

Аналогично из $\left[\sigma'_{\rho\theta}(\beta_0) + \frac{d\sigma_{\rho\theta}^{(0)}(\beta_0)}{d\rho} u' \right] = 0$ с учетом равенств $\sigma_{\rho\theta}^{0e} = 0$, $\sigma_{\rho\theta}^{0p} = 0$ получаем

$$\sigma_{\rho\theta}^{\prime e} = \sigma_{\rho\theta}^{\prime p} \quad \text{при} \quad \rho = \beta_0, \quad (28)$$

а из $\left[\sigma'_{\theta\theta}(\beta_0) + \frac{d\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(\beta_0)}{d\rho} u' \right] = 0$ с учетом того, что $\sigma_{\theta\theta}^{0p} = 1$, выводим

$$\sigma_{\theta\theta}^{\prime e}(\beta_0) + \frac{d\sigma_{\theta\theta}^{0e}(\beta_0)}{d\rho} u^e = \sigma_{\theta\theta}^{\prime p}(\beta_0). \quad (29)$$

Выбор возмущенной границы диска в виде (1) обеспечивает осевую симметрию в пластической зоне. Поэтому в условиях сопряжения (27), (28) дополнительно следует принять [1, 2]

$$\sigma_{\rho\rho}^{\prime e} = \sigma_{\rho\rho}^{\prime p} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta_0, \quad (30)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{\prime e} = \sigma_{\rho\theta}^{\prime p} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta_0. \quad (31)$$

Получение характеристического уравнения. Возмущенное состояние, приводящее к потере устойчивости вращающегося кругового диска по данному сценарию, можно считать инициированным малыми возмущениями, вид которых определен решениями соответствующих линеаризованных дифференциальных уравнений для неподвижной упругой кольцевой пластины, нагруженной гармоническими (периодическими) по θ усилиями на контуре. Анализ этих зависимостей [3] показывает, что в общем виде уравнениям для возмущений можно удовлетворить, если считать, что

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{\prime e} &= (nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} + (n-2)C\rho^n + (n+2)D\rho^{-n}) \cos n\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{\prime e} &= (-nA\rho^{n-2} - nB\rho^{-n-2} - (n+2)C\rho^n - (n-2)D\rho^{-n}) \cos n\theta, \\ \sigma_{\rho\theta}^{\prime e} &= (-nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} - nC\rho^n + nD\rho^{-n}) \sin n\theta, \\ u^e &= \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{(\nu+1)n}{n-1} A\rho^{n-1} - \frac{(\nu+1)n}{n+1} B\rho^{-n-1} + \frac{n-2+\nu(n+2)}{n+1} C\rho^{n+1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n+2+\nu(n-2)}{n-1} D\rho^{-n+1} \right) \cos n\theta. \end{aligned} \quad (32)$$

Удовлетворение функциями (30) граничных условий (24), (25) и условий сопряжения (27), (28) (для неподвижной кольцевой пластины — граничных условий на внутренней контурной окружности) приводит к системе линейных однородных уравнений относительно A , B , C и D :

$$\begin{aligned}
 & nA + nB + (n-2)C + (n+2)D + A_1 \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{(\nu+1)n}{n-1} A - \frac{(\nu+1)n}{n+1} B + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{n-2+\nu(n+2)}{n+1} C - \frac{n+2+\nu(n-2)}{n-1} D \right) = 0, \\
 & -A + B - C + D + A_2 \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{(\nu+1)n}{n-1} A - \frac{(\nu+1)n}{n+1} B + \frac{n-2+\nu(n+2)}{n+1} C - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{n+2+\nu(n-2)}{n-1} D \right) = 0, \\
 & n\beta_0^{n-2} A + n\beta_0^{-n-2} B + (n-2)\beta_0^n C + (n+2)\beta_0^{-n} D = 0, \\
 & -\beta_0^{n-2} A + \beta_0^{-n-2} B - \beta_0^n C + \beta_0^{-n} D = 0,
 \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$A_1 = \frac{d\sigma_{\rho\rho}^{0e}(1)}{d\rho}, \quad A_2 = \sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{\rho\rho}^{0e}(1).$$

Определим константы A_1 и A_2 . На основании (13) и (14) имеем

$$A_1 = \frac{2(3\nu+1)\beta_0^4 - 6(\nu+3)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2}, \tag{34}$$

$$A_2 = \frac{2(3\nu+1)\beta_0^4 + 6(1-\nu)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2}. \tag{35}$$

Таким образом, характеристическое уравнение [1, 3] имеет вид

$$\Delta(\beta_0) = 0, \tag{36}$$

где $\Delta(\beta_0)$ — определитель матрицы $(a_{ij})_{i,j=1}^4$ системы (31). Полагая в (34), к примеру, $\nu = 1/2$, получим характеристическое уравнение в случае несжимаемого материала диска:

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{n^2-1} \frac{\sigma_s}{E} \left\{ \frac{5\beta_0^4 - 21}{21 - 5\beta_0^2(2-\beta_0^2)} \times \right. \\
 & \quad \times \frac{5n^2\beta_0^{2n-2} + (4n-1) - (4n+1)\beta_0^{4n} - 3n^2\beta_0^{2n+2} - 2(n^2-1)\beta_0^{2n}}{2(n^2-1)\beta_0^{2n} - n^2\beta_0^{2n+2} - n^2\beta_0^{2n-2} + 1 + \beta_0^{4n}} + \frac{5\beta_0^4 + 3}{21 - 5\beta_0^2(2-\beta_0^2)} \times \\
 & \quad \left. \times \frac{3n^4\beta_0^{2n+2} + (n^2-4n) - 6n^2(n^2-1)\beta_0^{2n} + (n^2+4n)\beta_0^{4n} + (3n^4-8n^2)\beta_0^{2n-2}}{2(n^2-1)\beta_0^{2n} - n^2\beta_0^{2n+2} - n^2\beta_0^{2n-2} + 1 + \beta_0^{4n}} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

(сравнить с [1, 3]).

Таблица 1. Значения критического радиуса и относительной критической скорости в зависимости от n

n	2	3	4	5	6
β_{0*}	0,7144	0,8433	0,8963	0,9247	0,9421
$\frac{\omega_*}{q}$	1,6706	1,7099	1,7217	1,7264	1,7286

Анализ результатов. Решая уравнение (34) при заданных параметрах диска, а именно σ_s , E и ν , и натуральном параметре $n \geq 2$, получаем критическое значение радиуса пластической области β_{0*} , $\beta_{0*} \in (0, 1)$. Далее на основании (11) с использованием значений плотности материала диска γ и радиуса a находим соответствующее критическое значение квадрата угловой скорости

$$\omega_*^2 = q^2 \frac{24}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_{0*}^2)\beta_{0*}^2}. \quad (37)$$

В табл. 1 приведены результаты решения задачи для различных n при $\nu = 1/2$ и $\sigma_s/E = 0,01$ (сравнить с [1, 3]).

Авторы выражают благодарность проф. И. Ю. Бабичу за полезное обсуждение данной проблемы и библиографические указания.

1. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР, ОТН. – 1958. – № 1. – С. 124–125.
2. Ивлев Д. Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Там же. – 1957. – № 1. – С. 141–144.
3. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
4. Соколовский В. В. Теория пластичности. – Москва: Высш. шк., 1969. – 608 с.

Черкасский национальный университет
им. Богдана Хмельницкого
Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 14.04.2010

D. M. Lila, Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk**

About the stability loss of a rotating elastoplastic circular disc

A way of calculating the possible stability loss by a rotating plane circular disc is suggested within the theory of small elastoplastic deformations with the help of the small parameter method. The formula for calculating the critical angular velocity for the rotation of an incompressible disc is verified.