ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

К. О. Буряченко

Єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівнянь довільного парного порядку у випадку кратних характеристик, які не мають кутів нахилу

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Розглянуто однорідну задачу Діріхле в одиничному крузі $K \subset \mathbb{R}^2$ для загального безтипного диференціального рівняння довільного парного порядку $2m$, $m \geqslant 2$, зі сталими комплексними коефіцієнтами, характеристичне рівняння якого має кратні корені $\pm i$. Для кожного значення кратності коренів i та $-i$ сформульовано критерії існування нетривіального розв'язку задачі або доведено, що задача має тільки тривіальний розв'язок. Отримані результати узагальнюють відомі приклади А. В. Біцадзе у випадку безтипних рівнянь довільного парного порядку.

Для загального безтипного диференціального рівняння довільного парного порядку $2m$, $m \geqslant 2$, зі сталими комплексними коефіцієнтами та однорідним за порядком диференціювання виродженим символом розглядається однорідна задача Діріхле в одиничному крузі $K \in \mathbb{R}^2$. Виродженість символа означає, що корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2m}$ характеристичного рівняння можуть бути кратними, а також набувати значень $\pm i$. Для кожного значення кратностей цих коренів отримано критерії нетривіальності ядра відповідної задачі Діріхле. У випадку, коли кратність k кореня i (або $-i$), $k > m$, отримані в роботі результати узагальнюють відомі приклади А. В. Біцадзе [1]: $\partial^2 u/\partial \overline{z}^2 = 0$, $\partial^2 u/\partial z^2 = 0$. Зазначимо, що різноманітним узагальненням прикладів А. В. Біцадзе присвячено також роботи В. С. Віноградова [2], В. І. Шевченка [3].

1. Постановка задач. Розглянемо однорідну задачу Діріхле в одиничному крузі $K \subset \subset \mathbb{R}^2$ для загального безтипного диференціального рівняння довільного парного порядку $2m$, $m \geqslant 2$:

$$L(\partial_x)u = a_0 \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + a_1 \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m-1} \partial x_2} + \cdots + a_{2m-1} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1 \partial x_2^{2m-1}} + a_{2m} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} = 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial K} = 0, \qquad u'_\nu\big|_{\partial K} = 0, \qquad \ldots, \qquad u_\nu^{(m-1)}\big|_{\partial K} = 0, \tag{2}$$

де $\vec{\nu}$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі, $\partial_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$, $a_i \in C$, $i = 0, 1, \ldots, 2m$.

Нагадаємо (див., напр., [4]), що *кутом нахилу характеристики, що відповідає деякому кореню* $\lambda_j \neq \pm i$ *характеристичного рівняння*, будемо називати будь-який розв'язок рівняння: $-\operatorname{tg}\varphi_j = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, 2m$. Обмеження $\lambda_j \neq \pm i$, $j = 1, 2, \ldots, 2m$, якраз пов'язано з тим, що рівняння $\operatorname{tg}(x) = \pm i$ не має розв'язків.

2. Випадок кратного кореня i (або $-i$) характеристичного рівняння. Вважатимемо, що серед коренів характеристичного рівняння $L(1, \lambda) = 0$ знаходиться корінь i (або $-i$) кратності $k > 1$. Інші корені — прості та не дорівнюють $\pm i$. Доведемо критерій існування нетривіального розв'язку задачі (1), (2) залежно від значення кратності k кореня i. Випадок $-i$ розглядається аналогічно.

Теорема 1. *1. Нехай i — корінь характеристичного рівняння кратності $k < m$. Тоді для існування нетривіального розв'язку задачі Діріхле* (1), (2) *у просторі $C^{2m}(\overline{K})$ необхідно і достатньо виконання такої умови для деякого $n \in \mathbf{N}$, $n > 2m - 1$:*

$$\Delta_1 = \det A = 0, \tag{3}$$

де матриця A має вигляд:

$$\Delta_1 = \det A = \det(\widetilde{A}, A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_m) = 0,$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} e^{in\varphi_{k+1}} & \ldots & e^{i(n-2(k-1))\varphi_{k+1}} \\ e^{in\varphi_{k+2}} & \ldots & e^{i(n-2(k-1))\varphi_{k+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{in\varphi_{2m}} & \ldots & e^{i(n-2(k-1))\varphi_{2m}} \end{pmatrix},$$

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos(n-2(j-1))\varphi_{k+1} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{k+1} \\ \cos(n-2(j-1))\varphi_{k+2} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{k+2} \\ \ldots & \ldots \\ \cos(n-2(j-1))\varphi_{2m} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{2m} \end{pmatrix},$$

$j = k+1,\ k+2, \ldots, m$.

2. Якщо $k = m$, тоді задача Діріхле (1), (2) *має тільки тривіальний розв'язок.*

3. Якщо характеристичне рівняння має корінь i кратності $k > m$, то задача Діріхле (1), (2) *завжди має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків.*

Доведення. *1. Необхідність.* Згідно з твердженням [4, с. 199–200], існування нетривіального розв'язку задачі Діріхле (1), (2) у просторі $C^{2m}(\overline{K})$ призводить до існування нетривіального аналітичного в $\mathbf{C}^2$ розв'язку $w(\xi) \in Z$ рівняння $(\Delta_\xi + 1)^m \{L(\xi) \cdot w(\xi)\} = 0$ або

$$\Delta_\xi^m v_N(\xi) = 0 \tag{4}$$

для молодшої нетривіальної однорідної поліноміальної частини $v_N(\xi)$ степеневого ряду функцій $v(\xi) = L(\xi) \cdot w(\xi)$. (Клас Z визначено як простір образів Фур'є функцій вигляду $\theta_K v$, $v \in C^{2m}(\mathbf{R}^2)$, θ_K — характеристична функція круга.) Із співвідношень (32.15)–(32.22) в [5] загальний поліноміальний розв'язок $\widetilde{v}(\xi)$ рівняння (4) можна подати у вигляді

$$\widetilde{v}_N(\xi) = \operatorname{Re}\{f_1(z) + \cdots + \overline{z}^{m-1} \cdot f_m(z)\} + i \operatorname{Re}\{g_1(z) + \cdots + \overline{z}^{m-1} \cdot g_m(z)\},$$

де $z = \xi_1 + i\xi_2$, $f_i(z) = \sum f_{in} \cdot z^n$, $g_i(z) = \sum g_{in} \cdot z^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — деякі поліноми. Звідси, використовуючи формули Ейлера, отримуємо

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_N(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_n^N \big[z^n(\alpha_{1n} + i\beta_{1n}) + \rho^2 z^{n-2}(\alpha_{2n} + i\beta_{2n}) + \rho^4 z^{n-4}(\alpha_{3n} + i\beta_{3n}) + \\ + \cdots + \rho^{2(m-1)} z^{n-2(m-1)}(\alpha_{mn} + i\beta_{mn}) \big] + \\ + \frac{1}{2} \sum_n^N \big[\overline{z}^n(\alpha_{1n} - i\beta_{1n}) + \rho^2 \overline{z}^{n-2}(\alpha_{2n} - i\beta_{2n}) + \rho^4 \overline{z}^{n-4}(\alpha_{3n} - i\beta_{3n}) + \\ + \cdots + \rho^{2(m-1)} \overline{z}^{n-2(m-1)}(\alpha_{mn} - i\beta_{mn}) \big]. \end{aligned} \quad (5)$$

Сталі α_{in}, β_{in} визначаються коефіцієнтами розкладання поліномів $f_i(z)$, $g_i(z)$.

Після ділення цілої функції $\widetilde{v}_N(\xi) = L(\xi)\widetilde{w}(\xi)$ на символ $L(\xi) = (\xi_1 - i\xi_2)^k \langle \xi, a^{k+1} \rangle \times \langle \xi, a^{k+2} \rangle \ldots \langle \xi, a^{2m} \rangle$ отримаємо поліном, що призводить до необхідності виконання таких умов:

$$\begin{aligned} &\alpha_{1n} + i\beta_{1n} = 0, \quad \alpha_{2n} + i\beta_{2n} = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{kn} + i\beta_{kn} = 0, \\ &\widetilde{v}_N\big|_{\varphi = -\varphi_{k+1}} = 0, \quad \widetilde{v}_N\big|_{\varphi = -\varphi_{k+2}} = 0, \quad \ldots, \quad \widetilde{v}_N\big|_{\varphi = -\varphi_{2m}} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Підставляючи (5) в (6), приходимо до системи лінійних рівнянь відносно сталих α_{in}, β_{in}, визначник матриці якої має вигляд (3). Оскільки задача (4) має нетривіальний розв'язок, то існує ненульовий набір сталих α_{in}, β_{in}, $n = 1, 2, \ldots, m$, що призводить до виконання умови (3).

Достатність. За умови (3) для деякого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2m$, побудуємо нетривіальний розв'язок задачі (1), (2) в явному вигляді. Використовуючи результати роботи [6], неважко перевірити, що рівняння $L(\partial_x)u = 0$ задовольняє така функція:

$$\begin{aligned} u(x) = C_1(x_1 + ix_2)^n + C_2(x_1 + ix_2)^{n-2} + C_3(x_1 + ix_2)^{n-4} + \cdots + \\ + C_k(x_1 + ix_2)^{n-2(k-1)} + \sum_{j=k+1}^{2m} C_j F_j(-\widetilde{a}^j \cdot x), \end{aligned}$$

де функції $F_j(-\widetilde{a}^j \cdot x)$ визначено через поліноми Чебишова за формулами (14) і (15) в [6].

2. Розглянемо випадок, коли кратність k кореня i характеристичного рівняння дорівнює m. Аналогічно *1* маємо такі умови подільності функції (5) на символ $L(\xi) = (\xi_1 - i\xi_2)^m \langle \xi, a^{m+1} \rangle \langle \xi, a^{m+2} \rangle \cdots \langle \xi, a^{m+m} \rangle$:

$$\begin{aligned} &\alpha_{1n} + i\beta_{1n} = 0, \quad \alpha_{2n} + i\beta_{2n} = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{mn} + i\beta_{mn} = 0, \\ &\widetilde{v}_N\big|_{\varphi = -\varphi_{m+1}} = 0, \qquad \widetilde{v}_N\big|_{\varphi = -\varphi_{m+2}} = 0, \quad \ldots, \quad \widetilde{v}_N\big|_{\varphi = -\varphi_{2m}} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Підставляючи функцію (5) в умови (7), приходимо до системи лінійних рівнянь відносно сталих α_{in}, β_{in}, визначник якої після заміни $z_1 = e^{2i\varphi_{m+1}}$, $z_2 = e^{2i\varphi_{m+2}}, \ldots, z_m = e^{2i\varphi_{2m}}$

має вигляд

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} e^{in\varphi_{m+1}} & e^{i(n-2)\varphi_{m+1}} & \dots & e^{i(n-2(m-2))\varphi_{m+1}} & e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+1}} \\ e^{in\varphi_{m+2}} & e^{i(n-2)\varphi_{m+2}} & \dots & e^{i(n-2(m-2))\varphi_{m+2}} & e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{in\varphi_{2m}} & e^{i(n-2)\varphi_{2m}} & \dots & e^{i(n-2(m-2))\varphi_{2m}} & e^{i(n-2(m-1))\varphi_{2m}} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+1}} \cdot e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+2}} \times \dots \times e^{i(n-2(m-1))\varphi_{2m}} \times \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (z_i - z_j).$$

Рівність $\Delta_2 = 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли $z_i = z_j$, але це не так ($\varphi_i \neq \varphi_j$). Значить, визначник не дорівнює нулеві. Таким чином, задача (4) має тільки тривіальний розв'язок, і, згідно з твердженням [4, с. 199–200], однорідна задача Діріхле (1), (2) має тільки тривіальний розв'язок.

3. Для того щоб після ділення функції (5) на символ $L(\xi) = (\xi_1 - i\xi_2)^{m+l} \langle \xi, a^{m+l+1} \rangle \times \times \dots \times \langle \xi, a^{2m} \rangle$, $l = 1, 2, \dots, m$, ми отримали поліном, з необхідністю маємо:

$$\alpha_{1n} + i\beta_{1n} = 0, \quad \alpha_{2n} + i\beta_{2n} = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{mn} + i\beta_{mn} = 0.$$

Крім того, $2m - (m + l) = m - l$ співвідношень на кути нахилу характеристик:

$$\widetilde{v}_N\big|_{\varphi=-\varphi_{m+l+1}} = 0, \quad \widetilde{v}_N\big|_{\varphi=-\varphi_{m+l+2}} = 0, \quad \dots, \quad \widetilde{v}_N\big|_{\varphi=-\varphi_{2m}} = 0.$$

Таким чином, для визначення коефіцієнтів α_{in}, β_{in} маємо систему $m + m - l = 2m - l$ рівнянь з $2m$ невідомими. У такої системи завжди існує ненульовий розв'язок. Значить, задача Діріхле (1), (2) для будь-яких кутів нахилу φ_j має нетривіальний розв'язок, $j = = m + l + 1, \dots, 2m$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Якщо значення кратності k кореня i більше половини порядку рівняння: $k > m$, то відповідна задача Діріхле (1), (2) має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків. Дійсно, після розкладання оператора L порядку $2m$: $L_{2m} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{m+l} L_{m-l}$, де L_{m-l} — диференціальний оператор порядку $m - l$, $l = 1, 2, \dots m$, характеристичне рівняння якого не має коренів $\pm i$, неважко помітити, що набір функцій

$$u_k(z) = (1 - z\overline{z})^{m+l-1} P_k(z), \qquad k = 0, 1, 2 \dots,$$

де $P_k(z)$ — довільні поліноми степеня k, задовольняє рівняння

$$L_{2m}u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+l} \cdot L_{m-l}u = \frac{\partial^{m+l}}{\partial \overline{z}^{m+l}} \cdot L_{m-l}u = 0$$

і умови Діріхле на межі $\partial K = \{z \in C \colon |z|t^2 = z\overline{z} = 1\}$ одиничного круга

$$u\big|_{|z|=1} = 0, \qquad u'_\rho\big|_{|z|=1} = 0, \quad \dots, \quad u_\rho^{(m-1)}\big|_{|z|=1} = 0, \qquad \rho = |z|.$$

Побудований приклад узагальнює відомий результат А. В. Біцадзе [1] для рівнянь другого порядку: $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = 0$ і $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = 0$, характеристичні рівняння яких мають корені i (та $-i$ відповідно) кратності $k = 2 > m = 1$ — половина порядку рівняння. Теорему доведено.

Зауваження 1. Відзначимо, що за умов *1* і *2* рівняння можуть бути як правильно еліптичними, так і неправильно еліптичними, тоді як умови *3* автоматично гарантують неправильну еліптичність рівняння (1), що призводить до нескінченновимірності ядра відповідної задачі Діріхле.

3. Випадок кратних коренів i та $-i$ характеристичного рівняння. Нехай числа $-i$ та i — корені характеристичного рівняння кратностей k_1 і k_2 відповідно ($k_1 + k_2 = 2, 3, \ldots, 2m, k_1 \cdot k_2 \neq 0$) і нехай для визначеності $k_2 > k_1$. Тоді на властивість єдиності розв'язку відповідної задачі Діріхле буде впливати той корінь, у якого кратність більше.

Теорема 2. *Нехай числа $-i$ та i — корені характеристичного рівняння кратностей k_1 і k_2 відповідно ($k_1 + k_2 = 2, 3, \ldots, 2m, k_1 \cdot k_2 \neq 0$) і нехай для визначеності $k_2 > k_1$. Тоді:*

1. Якщо $k_2 < m$, то для існування нетривіального розв'язку задачі Діріхле (1), (2) *необхідно і достатньо виконання такої умови для деякого $n \in N$, $n \geqslant 2m$:*

$$\Delta_3 = \det B = \det(\widetilde{B}, B_{k_2+1}, B_{k_2+2}, \ldots, B_m) = 0,$$

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} e^{i(n-2(k_2-1))\varphi_{l+1}} \\ e^{i(n-2(k_2-1))\varphi_{l+2}} \\ \cdots \\ e^{i(n-2(k_2-1))\varphi_{2m}} \end{pmatrix}, \qquad B_j = \begin{pmatrix} \cos(n-2(j-1))\varphi_{l+1} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{l+1} \\ \cos(n-2(j-1))\varphi_{l+2} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{l+2} \\ \cdots & \cdots \\ \cos(n-2(j-1))\varphi_{2m} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{2m} \end{pmatrix},$$

де $l = k_1 + k_2$, $j = k_2 + 1, k_2 + 2, \ldots, m$.

2. Якщо $k_2 = m$, то задача Діріхле (1), (2) *має тільки тривіальний розв'язок.*

3. За умови $m < k_2 \leqslant 2m$ задача Діріхле (1), (2) *завжди має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків.*

Зауваження 2. У випадку, коли $k_1 = k_2 = k$, оператор L порядку $2m$ можна подати у вигляді добутку k степеня оператора Лапласа і оператора порядку $2(m-k)$: $L_{2m} = \Delta^k \cdot L_{2m-2k}$. Друга частина теореми 1 роботи [6] свідчить про те, що з точки зору єдиності розв'язку задачі Діріхле для оператора L, характеристичне рівняння якого одночасно має корені i та $-i$, правильно еліптична частина (оператор Лапласа) значення не має, і такі рівняння мають властивості єдиності розв'язку, аналогічні рівнянням порядку $2(m-k)$. Згідно з результатами статті [6], критерієм порушення єдиності розв'язку задачі Діріхле в крузі для рівняння порядку $2(m-k)$ є умова

$$\det C = 0,$$

де матриця C має вигляд

$$\begin{pmatrix} \cos n\varphi_{2k+1} & \sin n\varphi_{2k+1} & \ldots & \cos(n-2(m-k-1))\varphi_{2k+1} & \sin(n-2(m-k-1))\varphi_{2k+1} \\ \cos n\varphi_{2k+2} & \sin n\varphi_{2k+2} & \ldots & \cos(n-2(m-k-1))\varphi_{2k+2} & \sin(n-2(m-k-1))\varphi_{2k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cos n\varphi_{2m} & \sin n\varphi_{2m} & \ldots & \cos(n-2(m-k-1))\varphi_{2m} & \sin(n-2(m-k-1))\varphi_{2m} \end{pmatrix}.$$

1. *Бицадзе А. В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 6. – С. 211–212.
2. *Виноградов В. С.* О задаче Дирихле для многомерных эллиптических систем второго порядка // Докл. АН СССР. – 1968. – **179**, № 4. – С. 766–767.

3. *Шевченко В. И.* Эллиптические системы трех уравнений с четырьмя неизвестными // Там же. – 1975. – **221**, № 5. – С. 1050–1052.
4. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 316 с.
5. *Векуа И. Н.* Новые методы решений эллиптических уравнений. – Москва: ОГИЗ, 1948. – 296 с.
6. *Бурский В. П., Буряченко Е. А.* Некоторые вопросы существования нетривиального решения однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге // Мат. заметки. – 2005. – **74**, № 4. – С. 1032–1043.

Донецький національний університет
Надійшло до редакції 27.05.2010

K. O. Buryachenko

The solution uniqueness of the Dirichlet problem for arbitrary even order equations with multiple characteristics without angles of slope

The homogeneous Dirichlet problem in a unit disk $K \subset \mathbb{R}^2$ is considered for a general equation of arbitrary even order $2m$, $m \geqslant 2$, with constant complex coefficients, the characteristic equation of which has multiple roots $\pm i$. For every value of the multiplicities of roots i and $-i$, the criteria of nontrivial solvability of the problem are obtained or it is proved that the problem has only the trivial solution. This result generalizes the well-known A. V. Bitsadze examples for the case of arbitrary even order equations.