УДК 519.21

А. И. Ильинский

О безграничной делимости смеси по параметру рассеяния гауссовского распределения

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Доведено, що якщо безмежно подільна характеристична функція виду $\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t^2} dS(\sigma)$, *де* $S(\sigma)$ *— функція розподілу, має обмежений пуассонівський спектр, то вона дорівнює* $\exp(-\sigma_0 t^2)$ *при деякому* $\sigma_0 \geqslant 0$.

Будем использовать терминологию, принятую в [1]. В частности, термин *характеристическая функция* означает преобразование Фурье–Стилтьеса функции распределения

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, dF(x). \tag{1}$$

Характеристическая функция $f(t)$ называется *безгранично делимой*, если при всяком натуральном n она является степенью некоторой характеристической функции: $f = (f_n)^n$, f_n — характеристическая функция. *Гауссовской* называется характеристическая функция вида $\exp(-\gamma t^2)$. Рассмотрим множество характеристических функций вида

$$f(t) = \int\limits_0^{\infty} \exp(-\sigma t^2)\, dS(\sigma), \tag{2}$$

где $S(\sigma)$ — произвольная функция распределения такая, что $S(0) = 0$. Функция распределения $F(x)$, соответствующая по формуле (1) характеристической функции $f(t)$ вида (2), является смесью по параметру σ гауссовских функций распределения со средним 0 и дисперсией $\sqrt{2\sigma}$. Хорошо известно, что функция распределения F безгранично делима, если безгранично делима функция распределения S [2, с. 642]. Однако условие безграничной делимости функции распределения S не является необходимым для безграничной делимости F [3].

Класс безгранично делимых характеристических функций $f(t)$ вида (2) описывается формулой

$$f(t) = \exp\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos tx - 1}{x^2} d\nu(x)\right), \tag{3}$$

где $\nu(x)$ — функция на полуоси $[0, \infty)$, удовлетворяющая условиям: 1) $\nu(x)$ — неубывающая; 2) $\nu(x)$ непрерывна слева в каждой точке луча $(0, \infty)$; 3) $\int\limits_1^{\infty} x^{-2} d\nu(x) < \infty$. Отметим, что если функция $\nu(x)$ имеет скачок в точке 0 величиной γ, то он дает вклад $-\gamma t^2/2$ в интеграл (2). Множество

$$\{x > 0\colon \forall\delta > 0, \nu(x+\delta) - \nu(x-\delta) > 0\}$$

положительных точек роста функции $\nu(x)$ из формулы (3) называется *пуассоновским спектром* характеристической функции $f(t)$. Если пуассоновский спектр характеристической функции $f(t)$ пуст, то $f(t) = \exp(-\gamma t^2/2)$, где $\gamma = \nu(0+0) - \nu(0)$ — величина скачка функции ν в точке 0.

С. Вольф [4] получил следующее необходимое условие безграничной делимости характеристической функции f вида (2) в терминах функции распределения S. Чтобы сформулировать его, введем обозначение $\varepsilon_a(\sigma)$ для функции распределения с единственной точкой роста a, т. е. $\varepsilon_a(\sigma) = 0$ при $\sigma \leqslant a$ и $\varepsilon_a(\sigma) = 1$ при $\sigma > a$.

Теорема А. *Если характеристическая функция f вида* (2) *является безгранично делимой и функция распределения $S(\sigma)$ не является функцией вида $\varepsilon_a(\sigma)$, то для всех достаточно больших σ выполняется неравенство*

$$1 - S(\sigma) \geqslant \exp(-\lambda\sigma\log^2\sigma) \tag{4}$$

с некоторой положительной постоянной λ.

С. Вольф [4] высказал предположение, что в теореме А неравенство (4) можно заменить таким неравенством:

$$1 - S(\sigma) \geqslant \exp(-\lambda\sigma\log\sigma). \tag{5}$$

С. Н. Антонов [5] заметил, что если предположение С. Вольфа справедливо, то из результатов [4, 6] вытекает, что в классе безгранично делимых характеристических функций вида (2) нет характеристических функций с непустым ограниченным пуассоновским спектром. Целью настоящей работы является прямое (не опирающееся на предположение С. Вольфа и на результаты С. Н. Антонова и Х. Оххубо) доказательство последнего утверждения.

Теорема 1. *Пусть f — безгранично делимая характеристическая функция вида* (2) *с ограниченным пуассоновским спектром. Тогда пуассоновский спектр характеристической функции f пуст, и, таким образом, $f(t) = \exp(-\sigma_0 t^2)$ для некоторого $\sigma_0 \geqslant 0$.*

Доказательство. По условию

$$f(t) = \exp(\psi(t)), \qquad \psi(t) = \int\limits_0^a \frac{\cos tx - 1}{x^2} d\nu(x), \tag{6}$$

где $a < \infty$. Надо показать, что функция $\nu(x)$ не имеет положительных точек роста, т. е. $\nu(x) = \gamma\varepsilon_0(x)$, где $\gamma \geqslant 0$. Предположим противное. Тогда характеристическая функция $f(t)$ имеет представление (6), где $a > 0$ и a является точкой роста функции $\nu(x)$. Интеграл, определяющий функцию $\psi(t)$ (см. (6)), сходится абсолютно и равномерно на любом компакте комплексной t-плоскости, поэтому характеристическая функция $f(t)$ является целой функцией. Известна следующая оценка в комплексной плоскости функции $\psi(t)$ (см. [1], лемма 5.2.4.):

$$\psi(t) = O(|t|^2 e^{a|\operatorname{Im} t|}), \qquad t \to \infty.$$

Значит, функция $\psi(t)$ является целой функцией экспоненциального типа и ее индикаторная диаграмма совпадает с отрезком $[-bi, bi]$ мнимой оси (мы воспользовались четностью функции $\psi(t)$). Заметим, что $b = a$. Это вытекает из следующей оценки функции $\psi(t)$ на мнимой оси: при всяком $\delta > 0$ и любом $r > 0$

$$\psi(ir) \geqslant C_1 + C_2 \operatorname{ch}(a-\delta)r,$$

где $C_j = C_j(\delta)$ — постоянные, причем $C_2(\delta) > 0$. Действительно,

$$\psi(ir) = \int\limits_0^a (\operatorname{ch} rx - 1)\frac{d\nu(x)}{x^2} \geqslant \int\limits_{a-\delta}^a (\operatorname{ch} rx - 1)\frac{d\nu(x)}{x^2} \geqslant$$

$$\geqslant -\int\limits_{a-\delta}^a \frac{d\nu(x)}{x^2} + \int\limits_{a-\delta}^a \operatorname{ch} r(a-\delta)\frac{d\nu(x)}{x^2} = C_1 + C_2 \operatorname{ch}(a-\delta)r.$$

Таким образом, индикатор $h_\psi(\theta)\colon = \varlimsup\limits_{r\to\infty} r^{-1}\log|\psi(re^{i\theta})|$ функции $\psi(t)$ равен $a|\sin\theta|$. В частности,

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log|\psi(re^{i\pi/8})|}{r} > 0. \tag{7}$$

С другой стороны, поскольку $|e^{-\sigma t^2}| \leqslant 1$ в угле $\{t\colon |\arg t| \leqslant \pi/4\}$, то каждая целая функция $f(t)$ вида (1) удовлетворяет в этом угле неравенству $|f(t)| \leqslant 1$. Таким образом, $\operatorname{Re}\psi(t) \leqslant 0$ в указанном угле. Покажем, что тогда $|\psi(t)|$ не может иметь на луче $\{t\colon \arg t = \pi/8\}$ рост больший, чем полиномиальный.

Фиксируем точку t_0 на луче $\{t\colon \arg t = \pi/8\}$ и число ϱ, $0 < \varrho < \gamma|t_0|$, где $\gamma = \sin(\pi/8)$. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим $t_n := t_0 + \varrho n\gamma$, $R_n := |t_n|\gamma$. Применим неравенство Каратеодори к функции $\psi(t)$ в круге $\{t\colon |t - t_n| \leqslant R_n\}$. Учитывая неравенства

$$A(R_n, \psi) := \max\{\operatorname{Re}\psi(t)\colon |t - t_n| \leqslant R_n\} \leqslant 0,\ |\operatorname{Re}\psi(t_n)| \leqslant |\psi(t_n)|,$$

для всякого $t \in \{t\colon |t - t_n| \leqslant \varrho\}$ получим

$$|\psi(t)| \leqslant \frac{2\varrho}{R_n - \varrho}(A(R_n,\psi) - \operatorname{Re}\psi(t_n)) + |\psi(t_n)| \leqslant |\psi(t_n)|\biggl(1 + \frac{2}{\gamma n}\biggr). \tag{8}$$

В частности, при $t = t_{n+1}$

$$|\psi(t_{n+1})| \leqslant |\psi(t_n)|\biggl(1 + \frac{2}{\gamma n}\biggr). \tag{9}$$

Из (9) следует, что при всех $n = 2, 3, \ldots$ имеет место неравенство

$$|\psi(t_n)| \leqslant |\psi(t_1)| \prod_{k=1}^{n-1}\biggl(1 + \frac{2}{\gamma k}\biggr) < |\psi(t_1)| \exp\biggl(\frac{2}{\gamma}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\biggr) < Cn^{2/\gamma} \tag{10}$$

с некоторой постоянной C. Комбинируя неравенства (8) и (10), получаем, что при всяком $t \in \{t : |t - t_n| \leqslant \varrho\}$ выполняется неравенство $|\psi(t)| \leqslant C_1 n^{2/\gamma}$. Значит,

$$|\psi(re^{i\pi/8})| = O(r^{2/\gamma}), \qquad r \to \infty. \tag{11}$$

Неравенство (11) противоречит неравенству (7), поэтому функция $\nu(x)$ не может иметь положительные точки роста. Теорема 1 доказана.

Замечание. Как сообщил автору И. В. Островский, утверждение теоремы 1 сохраняет силу, если предположение ограниченности пуассонова спектра заменить предположением

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r,\psi)}{r^2} = 0$$

$(M(r,\psi) = \max\{|\psi(t)|\colon |t| = r\})$.

Автор выражает глубокую благодарность И. В. Островскому за постановку вопроса и обсуждение результата.

1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. – Москва: Наука, 1972. – 480 с.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. – Москва: Мир, 1984. – 752 с.
3. *Kelker D.* Variance mixtures of normal distributions // Ann. Math. Statist. – 1971. – **42**. – P. 802–808.
4. *Wolfe S. J.* On the infinite divisibility of variance mixtures of normal distribution functions // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. – 1978. – **81**, №1. – P. 154–156.
5. *Антонов С. Н.* Об одном классе предельных распределений // Вероятностные распределения и математическая статистика. – 1986. – С. 40–48.
6. *Ohkubo H.* On the asymptotic tail behaviors of infinitely divisible distributions // Yokohama Math. J. – 1979. – **27**, No 2. – P. 77–89.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 31.05.2010

A. I. Il'inskii

On the infinite divisibility of variance mixtures of Gaussian distributions

We prove that an infinitely divisibile characteristic function of the form $\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t^2}\,dS(\sigma)$, *where* $S(\sigma)$ *is a distribution function, with bounded Poissonian spectrum is equal to* $\exp(-\sigma_0 t^2)$ *for some* $\sigma_0 \geqslant 0$.