УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, О. О. Пипка, І. Я. Субботін

Про характеризації пронормальних підгруп у деяких класах нескінченних груп

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Отримано нові результати щодо зв'язків між пронормальними, абнормальними та контранормальними підгрупами. Зокрема, наведено нові характеризації пронормальних та абнормальних підгруп. Також опис груп, усі підгрупи яких пронормальні, розширений до класу груп, які мають нормальну систему Куроша–Чернікова з локально ступінчатими факторами.

Підгрупа H групи G називається *абнормальною* в G, якщо для кожного елемента $g \in G$ має місце включення $g \in \langle H, H^g \rangle$. Абнормальні підгрупи вперше введені Ф. Холлом [1], а термін "абнормальна підгрупа" був запропонований Р. Картером у статті [2]. Оскільки абнормальні підгрупи самонормалізовні, абнормальність є реальним антиподом до властивості "бути нормальною підгрупою". Зазначимо, що кожна максимальна підгрупа, що не є нормальною, абнормальна.

Ф. Холл також ввів до розгляду таке узагальнення як нормальних, так і абнормальних підгруп. Підгрупа H групи G називається *пронормальною* в G, якщо підгрупи H та H^g спряжені в $\langle H, H^g \rangle$ для кожного елемента $g \in G$. Пронормальні підгрупи природно виникають у теорії скінченних розв'язних груп. Такими підгрупами будуть силовські та холлівські підгрупи, системні нормалізатори, картерові підгрупи. У теорії скінченних розв'язних груп властивості пронормальних підгруп, їх важливі характеризації та зв'язки з іншими важливими типами підгруп були досліджені досить детально.

Додержуючись Д. Роуса [3], підгрупу H групи G називатимемо *контранормальною*, якщо $H^G = G$. Важливим прикладом контранормальних підгруп будуть абнормальні підгрупи. Однак не кожна контранормальна підгрупа буде абнормальною.

У теорії скінченних груп виникли деякі послаблені форми пронормальності, які, однак, приводять до пронормальності у випадку скінченних розв'язних груп. Підгрупа H називається *проміжною* для G_0, якщо $G_0 \leqslant H \leqslant G$ [4]. Підгрупа H групи G називається *слабко пронормальною* в G, якщо для кожних двох таких проміжних підгруп K, L для підгрупи H, що K є нормальною в L, має місце включення $L \leqslant N_G(H)K$ (у цьому випадку також говорять, що H має *властивість Фраттіні*). Т. А. Пенг [5] довів, що у скінченній розв'язній групі кожна слабко пронормальна підгрупа є пронормальною. Цей результат був суттєво розширений у роботі Л. А. Курдаченка, Х. Отала, І. Я. Субботіна [6], більш конкретно, ця характеризація була розширена на нескінченні групи, що мають зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого задовольняють нормалізаторну умову.

Якщо H — пронормальна підгрупа групи G, то її нормалізатор $N_G(H)$ є вже абнормальною підгрупою в G (див., наприклад, [4, теорема 7]), зокрема, $N_G(H)$ є контранормальною підгрупою в G. Більше того, якщо K — це підгрупа, що містить H, то $N_K(H)$ буде абнормальною і в K, зокрема, $N_G(H)$ є контранормальною в K.

Вважатимемо, що підгрупа H групи G є *наближено пронормальною*, якщо $N_K(H)$ контранормальна в K для кожної підгрупи K, що містить у собі H.

У роботі Л. А. Курдаченка, А. Руссо, Д. Вінчензі [7] були розглянуті групи, усі підгрупи яких є наближено пронормальними. Основний результат цієї роботи показує, що *якщо G є локально радикальною групою, усі власні підгрупи якої наближено пронормальні, то кожна підгрупа групи G є пронормальною в G.*

Зразу зазначимо, що не кожна наближено пронормальна підгрупа буде пронормальною. Наведений нижче приклад показує це. Нехай G — спеціальна унітарна група всіх 3×3 матриць над полем $\mathbf{F}_9$ поряку 9. Ця група є простою та має порядок 6048. Мультиплікативна група $\mathbf{U}(\mathbf{F}_9)$ цього поля є циклічною. Нехай g — такий елемент, що $\langle g \rangle = \mathbf{U}(\mathbf{F}_9)$. Позначимо через K підгрупу, що породжується такими матрицями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & g^4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & g^4 \\ 0 & g^4 & 0 \\ g^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} g & g^2 & g^5 \\ g^5 & 0 & g^5 \\ g & g^6 & g^5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & g^2 & 1 \\ g^2 & 0 & g^6 \\ 1 & g^6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ця підгрупа є наближено пронормальною, але не пронормальною. Її порядок дорівнює 24, вона є розв'язною, але не нільпотентною. Зазначимо, що G має також 23 класи спряженості, що складаються з пронормальних підгруп.

У цьому зв'язку природно виникає таке питання: у яких групах кожна наближено пронормальна підгрупа буде пронормальною?

Спочатку відмітимо зв'язки між наближено пронормальними та слабко пронормальними підгрупами.

Пропозиція 1. *Нехай G — група, що має зростаючий ряд підгруп з абелевими факторами. Тоді кожна наближено пронормальна підгрупа G слабко пронормальна в G.*

Нехай $\mathfrak{X}$ — клас груп. Нагадаємо, що група G називається *гіпер-$\mathfrak{X}$-групою*, якщо G має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого належать до класу $\mathfrak{X}$.

Також нагадаємо, що група G називається *N-групою або групою з нормалізаторною умовою*, якщо для кожної підгрупи H має місце нерівність $H \neq N_G(H)$.

Теорема А. *Нехай G — гіпер-N-група. Тоді кожна наближено пронормальна підгрупа G пронормальна в G.*

Наслідок А1. *Нехай G — розв'язна група. Тоді кожна наближено пронормальна підгрупа G є пронормальною в G.*

Наслідок А2. *Нехай G — розв'язна група. Припустимо, що її підгрупа H має таку властивість: якщо K — підгрупа, що містить у собі H, то $N_K(H)$ є абнормальною підгрупою в K. Тоді K є пронормальною в G.*

Наслідок А3 [8] . *Нехай G — скінченна розв'язна група. Припустимо, що її підгрупа H має таку властивість: якщо K — підгрупа, що містить у собі H, то $N_K(H)$ є абнормальною підгрупою в K. Тоді K є пронормальною в G.*

Якщо H — абнормальна підгрупа групи G та K — підгрупа, що містить у собі H, то H буде абнормальною і в K, зокрема, H контранормальна в K.

Будемо говорити, що підгрупа H групи G є *наближено абнормальною*, якщо H є контранормальною в кожній підгрупі K, що містить у собі H.

Як наслідок теореми А ми отримуємо, що у кожній гіпер-N-групі будь-яка наближено абнормальна підгрупа буде абнормальною. Нижченаведений результат показує, що цей результат може бути значно посилений. Але спочатку наведемо деякі потрібні визначення.

Група G називається $\widetilde{N}$*-групою*, якщо вона задовольняє таку умову: *якщо M, L — такі підгрупи G, що L містить M і M — максимальна в L, то M є нормальною в L.*

Зазначимо, що кожна локально нільпотентна група буде $\widetilde{N}$-групою (див., наприклад, [9, теорема 18.1.3]), однак протилежне твердження не буде вірним [10]. Також відзначимо, що група G тоді і тільки тоді є $\widetilde{N}$-групою, коли її кожна підгрупа є членом деякої системи Куроша–Чернікова групи G [11, § 8].

Нехай G — група і $\mathfrak{S}$ — система підгруп G. Будемо говорити, що $\mathfrak{S}$ — це *система Куроша–Чернікова*, якщо вона задовольняє такі умови:

(КС 1) $\langle 1\rangle,\ G \in \mathfrak{S}$;

(КС 2) для кожної пари підгруп A, B системи $\mathfrak{S}$ має місце одне з двох включень: $A \leqslant B$ або $B \leqslant A$;

(КС 3) для кожної підмножини $\mathfrak{L}$ системи $\mathfrak{S}$ перетин усіх підгруп, що входять до підсистеми $\mathfrak{L}$, належить до $\mathfrak{S}$ та об'єднання усіх підгруп, що входять до підсистеми $\mathfrak{L}$, належить до $\mathfrak{S}$; зокрема, для кожного неодиничного елемента $x \in G$ об'єднання V_x усіх членів $\mathfrak{S}$, що не містять елемент x, належить до $\mathfrak{S}$ та перетин Λ_x усіх членів $\mathfrak{S}$, що містять елемент x, належить до $\mathfrak{S}$;

(КС 4) для кожного неодиничного елемента $x \in G$ підгрупа V_x є нормальною в Λ_x.

Фактор-групи Λ_x/V_x називаються *факторами системи* $\mathfrak{S}$.

Якщо кожна підгрупа системи $\mathfrak{S}$ є нормальною в усій групі G, то $\mathfrak{S}$ називається *нормальною системою Куроша–Чернікова.*

Системи такого роду були введені до розгляду у статті А. Г. Куроша, С. М. Чернікова [11], що вже давно стала класичною.

Теорема В. *Нехай G — гіпер-$\widetilde{N}$-група. Тоді кожна наближено абнормальна підгрупа G абнормальна в G.*

У випадку скінченних розв'язних груп абнормальність досить тісно пов'язана з властивістю "бути самонормалізовною підгрупою". Так, Д. Таунт довів, що підгрупа *H скінченної розв'язної групи G є абнормальною тоді і тільки тоді, коли кожна проміжна для H підгрупа є самонормалізовною.* У статті Л. А. Курдаченка, І. Я. Субботіна [12] цей результат був розширений на клас радикальних груп. Як наслідок теореми В ми отримуємо суттєве розширення цього результату.

Наслідок В1. *Нехай G — гіпер-$\widetilde{N}$-група та H — її підгрупа. Припустимо, що $N_G(L) = L$ для кожної підгрупи L, що містить у собі H. Тоді H є абнормальною підгрупою групи G.*

Наслідок В2 [12]. *Нехай G — радикальна група та H — її підгрупа. Припустимо, що $N_G(L) = L$ для кожної підгрупи L, що містить у собі H. Тоді H є абнормальною підгрупою групи G.*

Для пронормальних підгруп клас $\widetilde{N}$-груп відіграє особливу роль, як показує

Пропозиція 2. *Нехай G — $\widetilde{N}$-група та H — її підгрупа. Якщо H є слабко пронормальною в G, то вона є нормальною в G.*

Наслідок. *Нехай G — $\widetilde{N}$-група та H — її підгрупа. Якщо H є пронормальною в G, то вона є нормальною в G.*

Групи, кожна підгрупа яких є пронормальною, почали вивчатись досить давно. Т. А. Пенг [13] отримав опис таких скінченних розв'язних груп. У роботі М. Ф. Кузенного, І. Я. Субботіна [14] наведено опис періодичних локально ступінчатих груп, усі підгрупи яких пронормальні, а також опис неперіодичних локально розв'язних груп, усі підгрупи яких пронормальні.

Нагадаємо, що група G називається *локально ступінчатою*, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа має власну підгрупу скінченного індексу.

Зазначимо, що неперіодичні локально розв'язні групи, усі підгрупи яких пронормальні, є абелевими [14]. У статті Д. Робінсона, А. Руссо, Д. Вінчензі [15] цей останній результат був розширений на клас локально ступінчатих груп. Нижченаведений результат суттєво розширює клас груп, у якому описані групи, усі підгрупи яких пронормальні.

Теорема C. *Нехай G — група, що має нормальну систему Куроша–Чернікова, фактори якої локально ступінчаті. Припустимо, що кожна підгрупа G є пронормальною. Тоді:*

1. Якщо G — неперіодична, то вона абелева.

2. Якщо G — періодична і L — її локально нільпотентний резидуал, то G задовольняє такі умови:

(i) G/L — дедекіндова група;

(ii) $\Pi(L) \bigcap \Pi(G/L) = \varnothing$;

(iii) $2 \notin \Pi(L)$;

(iv) кожна підгрупа L є G-інваріантною;

(v) якщо S — силовська $\Pi(G/L)$-підгрупа G, то $G = LS$.

Для періодичних груп цей результат може бути посилений.

Теорема D. *Нехай G — група, що має систему Куроша–Чернікова, фактори якої локально ступінчаті. Припустимо, що кожна підгрупа G є пронормальною. Тоді G задовольняє такі умови:*

(i) G/L — дедекіндова група;

(ii) $\Pi(L) \bigcap \Pi(G/L) = \varnothing$;

(iii) $2 \notin \Pi(L)$;

(iv) кожна підгрупа L є G-інваріантною;

(v) якщо S — силовська $\Pi(G/L)$-підгрупа G, то $G = LS$.

1. *Hall P.* On system normalizers of soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1937. – **43**. – P. 507–528.
2. *Carter R. W.* Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z. – 1961. – **75**. – P. 136–139.
3. *Rose J. S.* Nilpotent subgroups of finite soluble groups // Ibid. – 1968. – **106**. – P. 97–112.
4. *Ba M. S., Borevich Z. I.* On arrangement of intermediate subgroups // Rings and Linear Groups. – Krasnodar: Kubanskij Univ., 1988. – P. 14–41.
5. *Peng T. A.* Pronormality in finite groups // J. London Math. Soc. – 1971. – **3**, No 2. – P. 301–306.
6. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Abnormal, pronormal, contranormal and Carter subgroups in some generalized minimax groups // Communs. Algebra. – 2005. – **33**. – P. 4595–4616.
7. *Курдаченко Л. А., Руссо А., Винчензи Д.* О некоторых группах, все подгруппы которых близки к пронормальным // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**. – С. 1332–1339.
8. *Wood G. J.* On pronormal subgroups of finite soluble groups // Arch. Math. – 1974. – **25**. – P. 578–585.
9. *Kargapolov M. I., Merzlyakov Yu. I.* Foundations of the theory of groups. – New York: Springer, 1979. – 329 p.
10. *Wilson J. S.* On periodic generalized nilpotent groups // Bull. London Math. Soc. – 1977. – **9**. – P. 81–85.
11. *Курош А. Г., Черников С. Н.* Разрешимые и нильпотентные группы // Успехи мат. наук. – 1947. – **2**, No 3. – С. 18–59.
12. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Abnormal subgroups and Carter subgroups in some infinite groups // Algebra and Discrete Mathematics. – 2005. – No 1. – P. 69–83.
13. *Peng T. A.* Finite groups with pronormal subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **20**. – P. 232–234.
14. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Группы, все подгруппы которых пронормальны // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, No 3. – С. 325–329.

15. *Robinson D. J. S., Russo A., Vincenzi G.* On groups which contain no HNN-extensions // Int. J. Algebra Comput. – 2007. – **17**, No 7. – P. 1377–1387.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

Надійшло до редакції 06.04.2010

L. A. Kurdachenko, O. O. Pypka, I. Ya. Subbotin

A characterization of pronormal subgroups in some classes of infinite groups

New results on the connections between pronormal, abnormal, and contranormal subgroups of a group are presented. New characterizations of pronormal and abnormal subgroups have been obtained. The description of groups, whose all subgroups are pronormal, has been extended to a class of groups having the normal Kurosh–Chernikov series with locally graded factors.