



УДК 539.375

© 2011

А. А. Каминский, Л. А. Кипнис

О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

В умовах плоскої деформації у рамках комплексної моделі зони передруйнування біля кінця тріщини, що розташована на гладкій межі поділу двох ізотропних пружних середовищ, яка враховує контактну зону і вузьку бічну зону передруйнування, пропонується метод визначення розкриття тріщини в її кінці та формулюється умова зрушення тріщини.

В [1] для осуществления в условиях плоской деформации расчета зоны предразрушения вблизи конца трещины, расположенной на границе раздела упругих сред, предлагается использовать комплексную модель данной зоны. Эта модель учитывает наличие зоны контакта берегов трещины в окрестности ее конца (зона контактного проскальзывания), которая моделируется линией разрыва касательного смещения [2, 3], а также существование узкой боковой зоны ослабленных связей, развивающейся из конца трещины. Преимущественные деформации в боковой зоне предразрушения развиваются по механизму отрыва. Поэтому указанная зона моделируется прямой линией, на которой допускается разрыв лишь нормального смещения, а нормальное напряжение равно заданной постоянной материала σ (сопротивление отрыву). Скачок касательного смещения на этой линии разрыва считается приблизительно равным нулю. Такая модель боковой зоны предразрушения представляет собой обобщение модели Леонова–Панасюка [4].

Граничные условия соответствующей задачи линейной теории упругости в случае краевой трещины имеют следующий вид (рис. 1):

$$\begin{aligned} y = 0, \quad x > 0, \quad \langle \sigma_y \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = 0, \quad \langle v \rangle = \langle u \rangle = 0; \\ y = 0, \quad -s < x < 0, \quad \langle \sigma_y \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = 0, \quad \langle v \rangle = 0, \quad \tau_{xy} = 0; \\ y = 0, \quad x < -s, \quad \langle \sigma_y \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = 0, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0; \\ \theta = \alpha, \quad r < l, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma \end{aligned} \quad (1)$$

($\langle a \rangle$ — скачок a); на линии A_1BA_2 заданы произвольные граничные условия.

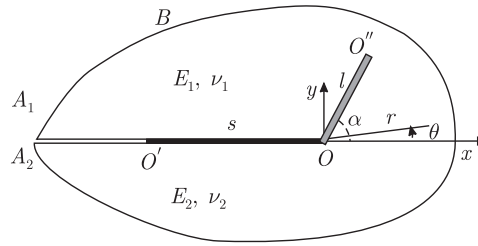


Рис. 1

Длина $s + l$ узкой зоны предразрушения, состоящей из зоны контактного проскальзывания и зоны ослабленных связей, определяется из условий ограниченности напряжений вблизи точек O' и O'' путем приравнивания к нулю коэффициента интенсивности напряжений в точке O' и коэффициента интенсивности напряжений в точке O'' . Угол наклона боковой зоны предразрушения α устанавливается из условия максимума потенциальной энергии, сосредоточенной в этой зоне.

С ростом внешней нагрузки длина боковой зоны предразрушения увеличивается. При некотором значении нагрузки вдоль этой узкой зоны ослабленных связей происходит разрыв сплошности и образование трещины.

Чтобы установить указанную разрушающую нагрузку, при которой происходит начальный поворот трещины, расположенной на границе раздела упругих сред, необходимо определить раскрытие трещины в ее конце O . Однако граничные условия (1) рассматриваемой задачи линейной теории упругости (см. рис. 1) таковы, что вектор смещения в точке O на верхнем берегу разреза OO' и вектор смещения в точке O на нижнем берегу разреза OO' совпадают. Поэтому раскрытие трещины в ее конце O оказывается равным нулю, чего быть не может при наличии зоны предразрушения. Таким образом, формулировка граничных условий требует некоторых изменений.

Для внесения изменений в граничные условия (1) воспользуемся результатами экспериментальных исследований [5, 6]. Из этих результатов следует, что часть боковой зоны предразрушения, находящаяся вблизи конца трещины, представляет собой область деструкции материала, которая отличается максимально высоким уровнем деформаций. Нельзя утверждать, что преимущественные деформации в области деструкции материала развиваются по механизму отрыва (данное утверждение справедливо для остальной части боковой зоны предразрушения), поскольку здесь проявляют себя как отрывной, так и сдвиговый механизмы развития деформаций. Поэтому при моделировании области деструкции материала линией разрыва скачок касательного смещения нельзя считать пренебрежимо малым.

Учитывая сказанное, узкую боковую зону предразрушения будем моделировать прямой линией разрыва, состоящей из двух участков. На участке, примыкающем к концу трещины, длина которого в значительной степени меньше длины всей линии разрыва, терпят разрыв нормальное и касательное смещения, а нормальное и касательное напряжения равны заданным постоянным материала σ и τ (сопротивление отрыву и сопротивление сдвигу). На втором участке терпит разрыв лишь нормальное смещение, а нормальное напряжение равно σ .

Таким образом, граничные условия задачи линейной теории упругости, моделирующей в условиях плоской деформации процесс развития зоны предразрушения вблизи кон-

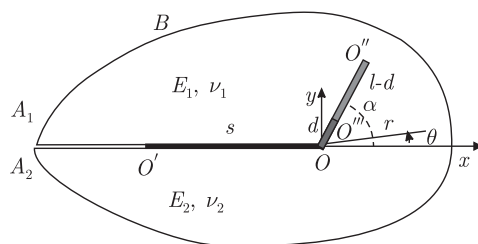


Рис. 2

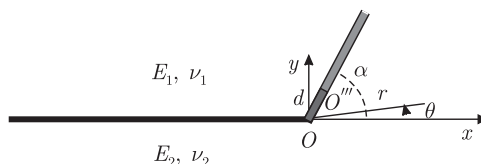


Рис. 3

ца трещины, расположенной на границе раздела упругих сред, имеют следующий вид (рис. 2):

$$\begin{aligned}
 y = 0, \quad x > 0, \quad \langle \sigma_y \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = 0, \quad \langle v \rangle = \langle u \rangle = 0; \\
 y = 0, \quad -s < x < 0, \quad \langle \sigma_y \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = 0, \quad \langle v \rangle = 0, \quad \tau_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad x < -s, \quad \langle \sigma_y \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = 0, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0; \\
 \theta = \alpha, \quad r < d, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma, \quad \tau_{r\theta} = \tau; \\
 \theta = \alpha, \quad d < r < l, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0, \sigma_\theta = \sigma;
 \end{aligned}$$

на линии A_1BA_2 заданы произвольные граничные условия.

Поскольку длина d области деструкции материала в значительной степени меньше длины l всей боковой зоны предразрушения, длины s зоны контактного проскальзывания и размеров тела, для определения длины полной зоны предразрушения и угла α по-прежнему служит задача, изображенная на рис. 1.

Для определения раскрытия трещины в ее конце O , а также длины d области деструкции материала служит задача линейной теории упругости о полубесконечных линиях разрыва, граничные условия которой таковы (рис. 3):

$$\begin{aligned}
 \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \\
 \sigma_\theta(r, \pi) = \sigma_\theta(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = \tau_{r\theta}(r, -\pi), \\
 u_\theta(r, \pi) = u_\theta(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = 0; \\
 \theta = \alpha, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \theta = \alpha, \quad \sigma_\theta = \sigma; \tag{2}
 \end{aligned}$$

$$\theta = \alpha, \quad r < d, \quad \tau_{r\theta} = \tau; \quad \theta = \alpha, \quad r > d, \quad \langle u_r \rangle = 0. \tag{3}$$

При $r \rightarrow \infty$ главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды совпадают с главными членами разложений напряжений в асимптотические ряды в задаче, изображенной на рис. 1, при $r \rightarrow 0$ и представляют собой решение задачи K , аналогичной рассматри-

ваемой (см. рис. 3) в случае $d = 0$, которое порождается единственным на интервале $]-1; 0[$ корнем λ_0 ее характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \Delta(-\lambda - 1) &= 0, \\ \Delta(z) &= (1 + \varkappa_1)[(e + \varkappa_1)^2 \delta_1(z) + (e + \varkappa_1)(1 + e\varkappa_2) \delta_2(z) + (1 + e\varkappa_2)^2 \delta_3(z)] + \\ &\quad + e(1 + \varkappa_2)(e + \varkappa_1)(1 + e\varkappa_2) \delta_4(z), \\ \delta_1(z) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 z(\pi - \alpha), \\ \delta_2(z) &= z \sin 2\alpha \sin 2z\alpha + \cos 2\alpha \cos 2z\alpha + \cos 2z\pi, \\ \delta_3(z) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 z(\pi - \alpha) + 4z^2 \sin^2 \alpha \cos^2 z\alpha - z \sin 2\alpha \sin 2z\alpha - \\ &\quad - 4 \sin z\alpha \cos z\pi \sin z(\pi - \alpha), \\ \delta_4(z) &= 2 \cos z\pi [2z^2 \sin^2 \alpha \cos z(\pi - 2\alpha) + z \sin 2\alpha \sin z(\pi - 2\alpha) - 2 \sin z\alpha \sin z(\pi - \alpha)], \\ e &= \frac{1 + \nu_2 E_1}{1 + \nu_1 E_2}, \quad \varkappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}. \end{aligned} \tag{4}$$

В частности,

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = f_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)\sigma + C f_2(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)r^{\lambda_0} + o(1/r) \tag{5}$$

(f_1, f_2 определяются из решения задачи K , а C — из решения задачи, изображенной на рис. 1).

Задача K решается методом разделения переменных. Уравнение (4), а также соответствующее уравнение в случае, когда при $\theta = \alpha$ расположена линия разрыва касательного смещения, получены в [7, 8].

В силу общих положений о поведении напряжений вблизи угловых точек упругих тел [9, 10], в точке O''' имеет место корневая особенность напряжений.

Решение рассматриваемой задачи линейной теории упругости (см. рис. 3) с граничными условиями (2), (3) и описанным условием на бесконечности представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо последнего условия (2) и первого условия (3) имеем

$$\theta = \alpha, \quad \sigma_\theta = 0; \quad \theta = \alpha, \quad r < d, \quad \tau_{r\theta} = \tau - f_1\sigma - C f_2 r^{\lambda_0}, \tag{6}$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$. Вторая задача — задача K .

Для построения точного решения первой задачи используется метод Винера–Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [11–13]. В результате применения преобразования Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (2) с учетом второго условия (3) и условий (6) задача сводится к функциональному уравнению Винера–Хопфа следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda_0+1} &= \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \Phi^-(p), \\ \Phi^+(p) &= \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho d, \alpha) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\substack{r=\rho d \\ \theta=\alpha}} \rho^p d\rho, \\ \tau_1 &= \tau - f_1\sigma, \quad \tau_2 = -C f_2 d^{\lambda_0}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ — достаточно малые положительные числа; $F_{1,2}(p)$ — целые функции, представляющие собой суммы произведений функций типа $\sin pa$, $\cos pa$, p , a (a — действительная постоянная).

Уравнение (7) допускает точное решение, выражаемое через интегралы типа Коши и гамма-функции. Подобные уравнения решены, например, в [14, 15].

На основе решения уравнения (7) находится коэффициент интенсивности напряжений в точке O''' в задаче, изображенной на рис. 3. Путем приравнивания этого коэффициента к нулю определяется длина d области деструкции материала. С использованием решения уравнения (7) и техники интегрального преобразования Меллина выводится формула для раскрытия трещины в ее конце O , равного $\lim_{x \rightarrow -0} |\langle u \rangle_{y=0}|$. При этом выражение для раскрытия содержит величину C (см. (5)), зависящую от внешней нагрузки.

Согласно деформационному критерию разрушения [4], трещина страгивается тогда, когда ее раскрытие в конце O достигает своего критического значения, представляющего собой заданную постоянную материала. Путем приравнивания выражения для раскрытия к заданной постоянной выводится уравнение, служащее для определения искомой разрушающей нагрузки.

Аналогично определяются раскрытие трещины в ее конце O и длина области деструкции материала в случаях, когда взаимодействие берегов трещины описывается законом кулонова трения или законом кулонова трения со сцеплением.

1. Каминский А. А., Кипнис Л. А. О комплексной модели зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела упругих сред // Доп. НАН України. — 2010. — № 2. — С. 60–64.
2. Соттиной М. The interface crack // J. Appl. Mech. — 1977. — 44. — P. 631–633.
3. Гузь А. Н. О физически некорректных результатах механики разрушения // Прикл. механика. — 2009. — 45, № 10. — С. 4–22.
4. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1968. — 246 с.
5. Каминский А. А., Усикова Г. И., Дмитриева Е. А. Экспериментальное исследование распределения пластических деформаций в окрестности вершины трещины при статическом нагружении // Прикл. механика. — 1994. — 30, № 11. — С. 69–75.
6. Каминский А. А., Нижник С. Б. Исследование закономерностей изменения пластической зоны у края трещины и характеристик трещиностойкости металлических материалов в зависимости от их структуры (обзор) // Там же. — 1995. — 31, № 10. — С. 3–27.
7. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. Начальная зона предразрушения в конце межфазной трещины с гладким контактом берегов // Теорет. и прикл. механика. — 2007. — 43. — С. 63–68.
8. Дудик М. В. Влияние трения берегов межфазной трещины на развитие начальной пластической зоны // Там же. — 2009. — 46. — С. 81–90.
9. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. — Москва: Наука, 1981. — 688 с.
10. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. — Москва: Наука, 1974. — 640 с.
11. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 279 с.
12. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Ленинград: Наука, 1967. — 402 с.
13. Кипнис Л. А. Краевая трещина на границе различных сред // Прикл. математика и механика. — 1978. — 42, № 2. — С. 350–354.
14. Кипнис Л. А. Линии скольжения в угловой точке границы раздела различных сред // Там же. — 1989. — 53, № 6. — С. 1028–1033.

15. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 10. – С. 28–41.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев
Уманский педагогический университет*

Поступило в редакцию 14.04.2010

A. A. Kaminsky, L. A. Kipnis

On the start of a crack on the interface of elastic media

A method of the crack-tip opening determination is proposed, and a crack start condition is formulated under the plane strain. To solve the problem, a complex model of the process zone near the crack tip on the smooth interface of two isotropic elastic media is used. According to this model, it is assumed that there are the contact zone and the narrow side prefracture zone in a vicinity of the crack tip.