УДК 531.36

Д. М. Лила

Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упруго-пластического диска

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

У рамках теорії малих пружно-пластичних деформацій запропоновано спосіб розрахунку методом малого параметра можливої втрати стійкості плоского кругового диска, що обертається. Підтверджено формулу для обчислення критичної кутової швидкості обертання диска із нестискуваного матеріалу.

Теория распределения напряжений во вращающемся цилиндре или диске за пределом текучести представляет близкую аналогию с теорией поля напряжений в толстостенной трубе или плоском кольце. Если последняя предусматривает возникновение пластических деформаций на внутренней поверхности трубы (внутренней контурной окружности кольца) из упругого материала вследствие значительного внутреннего давления, то в случае вращения причиной появления пластической зоны являются растягивающие центробежные силы. Увеличение частоты вращения сопровождается потерей устойчивости диска.

Рассмотрение вопроса об определении критической угловой скорости вращения для круглых дисков из несжимаемого материала и изучение потери несущей способности сплошных дисков приводится в работах [1, 2] и др. Изучению самоуравновешенной формы потери устойчивости сплошных и кольцевых дисков посвящены публикации [3]. В данной работе излагается основанный на методе возмущений [4] способ определения критической скорости вращения однородного и изотропного плоского кругового диска при произвольном коэффициенте Пуассона. Вид возмущения контурной окружности диска предполагает эксцентричную форму потери устойчивости. Приводится сравнительный анализ результатов.

Постановка задачи. Рассмотрим случай, когда уравнение внешней границы диска после потери устойчивости с точностью до бесконечно малых первого порядка может быть представлено в виде [1, 2, 4]

$$r = b + d\cos\theta, \qquad d = \mathrm{const},$$

или

$$\rho = 1 + \delta\cos\theta, \tag{1}$$

где b — радиус невозмущенного диска (радиус контурной окружности); $\rho = r/b$ — безразмерный текущий радиус; δ — малый параметр; θ — полярный угол (рис. 1). Предел текучести материала диска обозначим σ_s, модуль упругости — E, плотность — γ, коэффициент Пуассона — ν, угловую скорость вращения — ω, текущий радиус пластической зоны — r_0.

Требуется для описываемой зависимостью (1) формы потери устойчивости диска получить в первом приближении характеристическое уравнение для критического радиуса

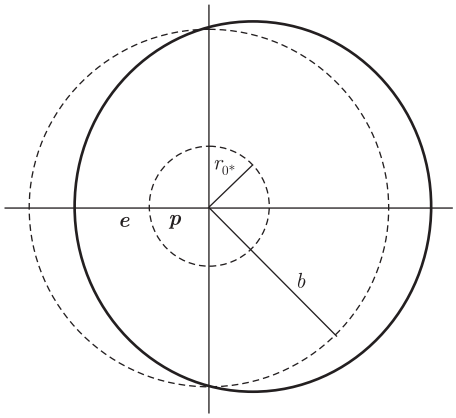

Рис. 1. Эксцентричная форма потери устойчивости кругового диска

пластической зоны r_{0*} и определить соответствующую величину критической угловой скорости вращения ω_*.

Получение характеристического уравнения Возмущенное состояние, приводящее к потере устойчивости вращающегося кругового диска по данному сценарию, можно считать инициированным малыми возмущениями, вид которых определен решениями соответствующих линеаризованных дифференциальных уравнений для неподвижной упругой кольцевой пластины, нагруженной периодическими по θ неуравновешенными усилиями на контуре. Анализ этих зависимостей [4] с учетом условия равновесия указанных нагрузок в системе с возникшей в центре диска сосредоточенной силой показывает, что в общем виде уравнениям для возмущений можно удовлетворить, если считать, что

$$\begin{aligned} \sigma'^{e}_{\rho\rho} &= (2A\rho + (3m+1)B\rho^{-1} - 2C\rho^{-3})\cos\theta, \\ \sigma'^{e}_{\theta\theta} &= (6A\rho - (m-1)B\rho^{-1} + 2C\rho^{-3})\cos\theta, \\ \sigma'^{e}_{\rho\theta} &= (2A\rho - (m-1)B\rho^{-1} - 2C\rho^{-3})\sin\theta, \\ u'^{e} &= \frac{\sigma_s}{E}\left(\frac{m-3}{m}A\rho^2 + \frac{(m+1)(3m-1)}{m}B\ln\rho + \frac{m+1}{m}C\rho^{-2}\right)\cos\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

где $m = \nu^{-1}$, $\sigma'^{e}_{\rho\rho}$, $\sigma'^{e}_{\theta\theta}$ и $\sigma'^{e}_{\rho\theta}$ — возмущения первого порядка малости соответствующих компонент напряжения, отнесенные к σ_s; u'^{e} — возмущение первого порядка малости радиального смещения, отнесенное к b.

Функции (2) должны при этом удовлетворять граничные условия

$$\sigma'^{e}_{\rho\rho} + A_1 u'^{e} = 0 \qquad \text{при} \qquad \rho = 1, \tag{3}$$

$$\sigma'^{e}_{\rho\theta} - A_2\frac{du'^{e}}{d\theta} = 0 \qquad \text{при} \qquad \rho = 1, \tag{4}$$

где

$$A_1 = \frac{2(3\nu+1)\beta_0^4 - 6(\nu+3)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2}, \qquad A_2 = \frac{2(3\nu+1)\beta_0^4 + 6(1-\nu)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2},$$

и единственное условие сопряжения (для неподвижной кольцевой пластины — граничное условие на внутренней контурной окружности)

$$\sigma'^{e}_{\rho\theta} = 0 \qquad \text{при} \qquad \rho = \beta_0 := \frac{r_0}{b}. \tag{5}$$

Использовавшееся при анализе самоуравновешенной формы потери устойчивости [3] второе условие сопряжения в виде

$$\sigma'^{e}_{\rho\rho} = \sigma'^{p}_{\rho\rho} = 0 \qquad \text{при} \qquad \rho = \beta_0$$

в случае эксцентричной формы потери устойчивости имеет вид тождества

$$\sigma'^{e}_{\rho\rho} = \sigma'^{p}_{\rho\rho} \qquad \text{при} \qquad \rho = \beta_0,$$

так как уравновешивающая сила учтена в (2).

Удовлетворение функциями (2) условий (3), (4), (5) приводит к системе линейных однородных уравнений относительно A, B и C:

$$\begin{gathered} 2A + (3m+1)B - 2C + A_1\frac{\sigma_s}{E}\left(\frac{m-3}{m}A + \frac{m+1}{m}C\right) = 0, \\ 2A - (m-1)B - 2C + A_2\frac{\sigma_s}{E}\left(\frac{m-3}{m}A + \frac{m+1}{m}C\right) = 0, \\ 2\beta_0 A - (m-1)\beta_0^{-1}B - 2\beta_0^{-3}C = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Характеристическому уравнению

$$\Delta(\beta_0) = 0, \tag{7}$$

где $\Delta(\beta_0)$ — определитель системы (6), на основе свойств определителей можно придать вид

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0,$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3m+1 & -2 \\ 2 & -(m-1) & -2 \\ 2\beta_0 & -(m-1)\beta_0^{-1} & -2\beta_0^{-3} \end{vmatrix} = -16m\beta_0(1-\beta_0^{-4}),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1\dfrac{\sigma_s}{E}\dfrac{m-3}{m} & 0 & A_1\dfrac{\sigma_s}{E}\dfrac{m+1}{m} \\ 2 & -(m-1) & -2 \\ 2\beta_0 & -(m-1)\beta_0^{-1} & -2\beta_0^{-3} \end{vmatrix} =$$

$$= A_1\frac{\sigma_s}{E}\frac{2(m-1)}{m}\beta_0^{-3}(1-\beta_0^2)((m-3)-(m+1)\beta_0^2),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3m+1 & -2 \\ A_2\dfrac{\sigma_s}{E}\dfrac{m-3}{m} & 0 & A_2\dfrac{\sigma_s}{E}\dfrac{m+1}{m} \\ 2\beta_0 & -(m-1)\beta_0^{-1} & -2\beta_0^{-3} \end{vmatrix} =$$

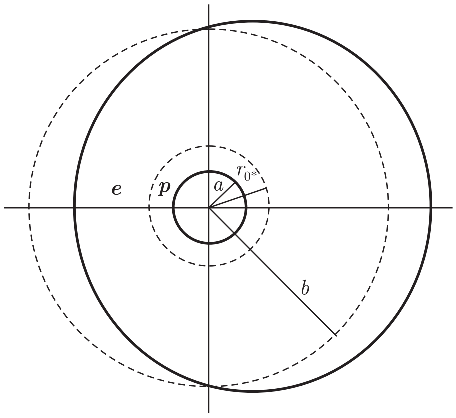

Рис. 2. Эксцентричная форма потери устойчивости кольцевого диска

$$= A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{2}{m}((m+1)(3m+1)\beta_0 + 2(m-1)^2\beta_0^{-1} + (m-3)(3m+1)\beta_0^{-3}).$$

Разделив уравнение (7) на $16m(1-\beta_0^{-4})$, окончательно получим

$$\frac{\sigma_s}{E}\left\{\frac{(m-1)\beta_0[-(m-3)+(m+1)\beta_0^2]}{8m^2(1+\beta_0^2)}A_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta_0[-(m-3)(3m+1) - 2(m-1)^2\beta_0^2 - (m+1)(3m+1)\beta_0^4]}{8m^2(1-\beta_0^4)}A_2\right\} - \beta_0 = 0.$$

В частном случае $m = 2$ отсюда получается известное уравнение [1, 4] относительно критического радиуса пластической области для круглого диска из несжимаемого материала. Единственным его корнем является $\beta_{0*} = 0$. Отсюда следует вывод: если в момент рождения пластического состояния в центре диска он не потеряет своей устойчивости по эксцентричной форме, то возможной формой потери устойчивости при возрастающей угловой скорости вращения может быть только самоуравновешенная. Соответствующую $\beta_{0*} = 0$ относительную критическую угловую скорость $\dfrac{\omega_*}{q} = 1{,}5118$, где $q = \dfrac{1}{b}\sqrt{\dfrac{\sigma_s}{\gamma}}$, будем называть первой критической скоростью, а соответствующую $\beta_{0*} \in (0,1)$ — второй критической.

Анализ результатов. Заменив сплошной диск кольцевым (рис. 2), испытывающим на внутреннем контуре радиусом a давление $P = \dfrac{1}{3}\gamma\omega^2\dfrac{b^3-a^3}{a}$ со стороны вращающегося вала, уравнение (7) можем получить таким же способом в таком же общем виде, считая, что

$$A_1 = \frac{2((3\nu+1)\beta_0^4 - 3(\nu+3)) - 8\beta^3\beta_0 + 3\beta\beta_0^{-1}((3\nu+1)\beta_0^4 - 2(\nu+3)\beta_0^2 - (\nu+3))\xi(\beta_0)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3\beta_0^{-1}(1+\beta_0^2)},$$

$$A_2 = \frac{2((3\nu+1)\beta_0^4 + 3(1-\nu)) - 8\beta^3\beta_0 + 3\beta\beta_0^{-1}((3\nu+1)\beta_0^4 - 2(\nu+1)\beta_0^2 + (1-\nu))\xi(\beta_0)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3\beta_0^{-1}(1+\beta_0^2)},$$

$$\xi(\beta_0) = -\frac{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2 - 8\beta^{-1}(\beta^3-1) - 4\beta^3\beta_0^{-1}(1+\beta_0^2)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta_0^{-1}(2\beta^3-1)(1+\beta_0^2)},$$

где $\beta = a/b$ (в частном случае $P = 0$ надо положить $\xi \equiv -1$).

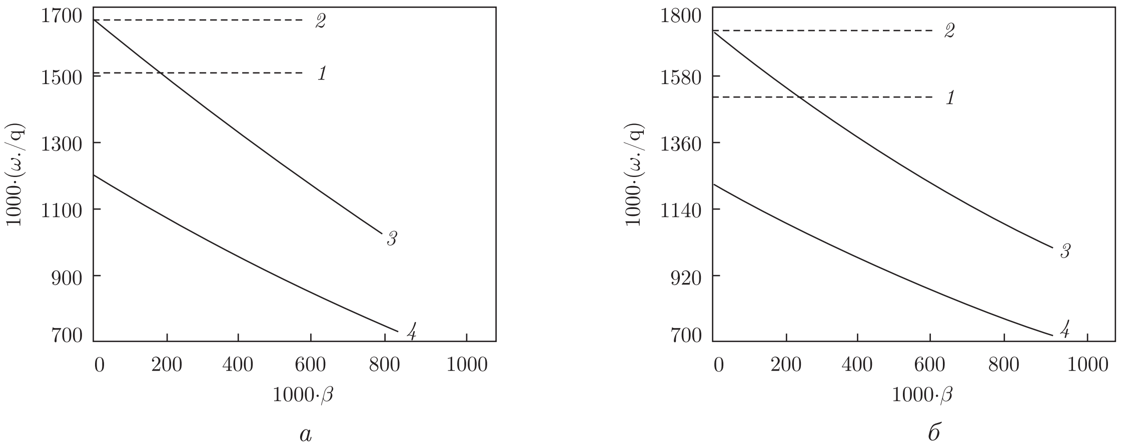

Рис. 3. Критическая относительная угловая скорость в зависимости от $\dfrac{a}{b}$ при $\dfrac{\sigma_s}{E} = 0{,}01$ и $n = 2$: *1* — первая критическая скорость, *2* — вторая критическая скорость, *3* — критическая скорость кольцевого диска при $P = 0$, *4* — критическая скорость кольцевого диска при $P \neq 0$ (*а*); при $\dfrac{\sigma_s}{E} = 0{,}01$ и $n = 5$ (*б*)

В этом случае при $m = 2$ уравнение (7) не имеет решений. Следовательно, круговой кольцевой диск в данной постановке задачи никогда не испытает эксцентричной формы потери устойчивости. Это значит, что кольцевой диск можно “разогнать” до большей скорости, чем первая критическая для сплошного диска (рис. 3, *а*, *б*).

Как следует из рис. 3, *а*, *б*, для этого нужно минимизировать влияние на кольцевой диск контурного давления со стороны вращающегося вала при удовлетворительном значении отношения внутреннего и внешнего радиусов.

1. *Ершов Л. В., Ивлев Д. Д.* О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – № 1. – С. 124–125.
2. *Ивлев Д. Д.* О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Там же. – 1957. – № 1. – С. 141–144.
3. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
4. *Лила Д. М., Мартынюк А. А.* О потере устойчивости вращающегося упругопластического кругового диска // Доп. НАН України. – 2011. – № 1. – С. 44–51.

Черкасский национальный университет им. Богдана Хмельницкого

Поступило в редакцию 14.04.2010

D. M. Lila

Eccentric form of stability loss of a rotating elastoplastic disc

A way of calculating a possible stability loss by a rotating plane circular disc is suggested within the theory of small elastoplastic deformations and the small parameter method. The formula for calculating the critical angular velocity of rotation of an incompressible disc is verified.