Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

2 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский

Экстремальные задачи для лучевых систем с переменным количеством точек на лучах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

У роботі розв'язано екстремальну задачу по знаходженню максимуму функціонала, який складається із добутку внутрішніх радіусів областей, у випадку різної кількості точок на променях відповідної променевої системи.

Экстремальные задачи о неналегающих областях составляют хорошо известное, классическое направление современной геометрической теории функций комплексного переменного (см., напр., [1–15]). В данной работе исследуется экстремальная задача с целью получения точных оценок произведений внутренних радиусов наборов взаимно неналегающих областей относительно некоторых систем точек плоскости при минимальных требованиях к таким системам (см. также работы [7–11].

Определения и обозначения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация или сфера Римана, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$. Рассмотрим все возможные наборы натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^n$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = m. \tag{1}$$

Систему точек $A_{n,d} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C}\colon k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m_k}\}$, где $\{m_k\}_{k=1}^n$ — произвольный набор вида (1), назовем обобщенной (n, d)-лучевой системой точек, если при всех $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &0 < |a_{k,1}| < \cdots < |a_{k,m_k}| < \infty; \\ &\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \cdots = \arg a_{k,m_k} =: \theta_k; \\ &0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi. \end{aligned} \tag{2}$$

Для таких систем точек рассмотрим следующие величины:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}[\theta_{k+1} - \theta_k], \qquad k = \overline{1,n}, \qquad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \qquad \alpha_0 := \alpha_n, \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

Если $m_k = d$, $k = \overline{1,n}$, то обобщенная система точек совпадает с обычной (n,d)-лучевой системой. При $n = m$ $(d = 1, m_k = 1, k = \overline{1,n})$ получаем n-лучевую систему точек (см. [7–11]). При выполнении условий $\alpha_k = 2/n$, $k = \overline{1,n}$, систему точек $A_{n,d}$ будем называть равноугольной.

Рассмотрим систему угловых областей:

$$P_k = \{w \in \mathbb{C}\colon \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}\}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Умножение обобщенной (n,d)-лучевой системы $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$ на число $t \in \mathbb{R}_+$ определим следующим образом: $t \cdot A_{n,d} = \{t \cdot a_{k,p}\}$. Для произвольной обобщенной (n,d)-лучевой системы рассмотрим "управляющий" функционал

$$\mu := \mu(A_{n,d}) := \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} \Big[\chi\big(|a_{k,p}|^{1/\alpha_k}\big) \cdot \chi\big(|a_{k,p}|^{1/\alpha_{k-1}}\big)\Big]^{1/2} \cdot |a_{k,p}|,$$

где $\chi(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Обозначим через $r(B;a)$ внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см. [4–6, 14]). Для произвольных n, $d \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, пусть $A^{(1)}_{n,d}$ обозначает (n,d)-лучевую равноугольную систему точек, образованную полюсами квадратичного дифференциала $Q(w)dw^2$, где

$$Q(w) = -\frac{w^{n-2}(1+w^n)^{2d-2}}{\big[(1 - iw^{n/2})^{2d} + (1 + iw^{n/2})^{2d}\big]^2}. \tag{3}$$

Для системы $A^{(1)}_{n,d}$ в соотношениях (2) выполняется условие $m_k = d$, $k = \overline{1,n}$. Более того, система точек $A^{(1)}_{n,d}$ обладает симметрией относительно окружности $|w| = 1$. Эти свойства не трудно получить из общей теории квадратичных дифференциалов [15].

Предметом изучения нашей работы является следующая задача.

Задача 1. Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geqslant 2$. Определить максимум величины

$$J = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}; a_{k,p}),$$

где $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$ — любая обобщенная (n,d)-лучевая система точек вида (2) такая, что $\mu(A_{n,d}) = \mu(A^{(1)}_{n,d})$, а $\{B_{k,p}\}$ — произвольный набор попарно непересекающихся областей, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, и описать все экстремали ($k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$).

Ясно, что данная задача обобщает соответствующие постановки задач, рассмотренных в [7–11].

Основной результат. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* n, m, $d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geqslant 2$. *Тогда для любой обобщенной* (n, d)*-лучевой системы точек* $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$, $\mu(A_{n,d}) = \mu(A_{n,d}^{(1)})$ *и произвольного набора взаимно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}; a_{k,p}) \leqslant \left(\frac{4}{nd}\right)^{nd} \cdot \mu(A_{n,d}^{(1)}). \tag{4}$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки $a_{k,p}$ *и области* $B_{k,p}$ *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала* (3).

Неравенство (4) дает равномерную оценку функционала J на всем классе систем точек, рассмотренных в задаче 1. Для обобщенных (n, d)-лучевых систем с учетом конкретики условия (1) получен несколько более сильный результат.

Теорема 2. *Пусть* n, m, $d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geqslant 2$. *Тогда для произвольной обобщенной* (n, d)*-лучевой системы точек* $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$, $\mu(A_{n,d}) = \mu(A_{n,d}^{(1)})$, *имеющей конкретную совокупность чисел* $\{m_k\}_{k=1}^{n}$ *вида* (1), *и произвольного набора попарно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *справедливо неравенство*

$$J \leqslant \left(\frac{2}{d}\right)^{nd} \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m_k + m_{k+1})/2} \cdot \mu(A_{n,d}^{(1)}),$$

где $m_{n+1} := m_1$. *Знак равенства в этом неравенстве достигается при тех же условиях, что и в теореме 1.*

Из теоремы 1 при $m = n$ $(d = 1)$ получаем такое утверждение для n-лучевых систем точек [7–10].

Следствие 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Для произвольной* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *такой, что*

$$\prod_{k=1}^{n} \left[\chi\big(|a_k|^{1/\alpha_k}\big) \cdot \chi\big(|a_k|^{1/\alpha_{k-1}}\big)\right]^{1/2} \cdot |a_k| = 1$$

и любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k; a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n}.$$

Знак равенства достигается, когда a_k *и* B_k *являются полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w) dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Из теоремы 2 при $m = n$ $(d = 1$, $m_k = 1$, $k = \overline{1, n})$ получаем следующий результат.

Следствие 2. *При выполнении условий следствия 1 справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k; a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Знак равенства достигается при тех же условиях, что и в следствии 1.

Для случая n-лучевых систем точек, расположенных на окружности $|w| = 1$, следствия 1 и 2 представляют известные результаты В. Н. Дубинина [4, 6, 9].

Метод доказательства использует разделяющее преобразование и усовершенствует технику, развитую в [7–11].

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
4. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семиноров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3–76.
6. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **237**. – С. 56–73.
7. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. – 308 с.
8. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 596–610.
9. *Дубинин В. Н.* О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена // Мат. сборник. – 2009. – **200**, № 10. – С. 25–38.
10. *Бахтин А. К., Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 3. – С. 298–303.
11. *Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 31–36.
12. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та РАН. – 2001. – **276**. – С. 253–275.
13. *Емельянов Е. Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Там же. – 2002. – **286**. – С. 103–114.
14. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
15. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 07.06.2010

A. K. Bahtin, A. L. Targonskii

Extremal problems for ray systems with variable number of points on rays

The extremal problem on maximizing a functional which consists of the products of the inner radii of domains for different numbers of points on rays of an appropriate ray system is solved.