ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2011

МЕХАНІКА

УДК 531.39

К. В. Аврамов, Е. А. Стрельникова

Нелинейные нормальные формы автоколебаний механических систем с конечным числом степеней свободы

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Е. Божко)

Запропоновано варіант методу нелінійних нормальних форм для дослідження автоколивань механічних систем з скінченним числом степеней вільності. При побудові нелінійних нормальних форм одна узагальнена координата та одна швидкість вибираються як незалежні змінні. Як приклад досліджена динаміка пластинки, що взаємодіє з рідиною.

Теория нелинейных нормальных форм была предложена Каудерером и Розенбергом. Подробное обсуждение их результатов содержится в работе [1]. Существенное развитие эта теория получила в работах Маневича и Михлина [1], где были предложены асимптотические процедуры для расчета нелинейных нормальных форм, а также в работах Вакакиса [2]. Нелинейные нормальные формы для систем с вязким трением рассматриваются в работах Шоу и Пьера [3]. Развитие теории нормальных форм вынужденных и параметрических колебаний представлено в [4, 5].

Ниже метод нелинейных нормальных форм развивается для анализа автоколебаний механических систем с конечным числом степеней свободы.

Колебания механической системы с конечным числом степеней свободы опишем следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\eta} + A\dot{\eta} + B\eta = f(\eta, \dot{\eta}), \tag{1}$$

где $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N\}$ — вектор обобщенных координат; $A = \{\alpha_{kj}\}$; $B = \{\beta_{kj}\}$ — матрицы, элементы которых не зависят от времени и обобщенных координат; $f = \{f_1, \ldots, f_N\}$ — нелинейная вектор-функция обобщенных координат, которая содержит только кубические слагаемые относительно обобщенных координат: $f_j = \sum\limits_{l,r,p=1}^{N} G_{lrp}^{(j)} \eta_l \eta_r \eta_p$; $j = 1, \ldots, N$. Предположим, что динамическая система (1) содержит тривиальное состояние равновесия $\eta = 0$, которое теряет устойчивость вследствие бифуркации Хопфа, и от этого состояния равновесия ответвляются автоколебания. Эти движения исследуются в дальнейшем. Автоколебания представим в виде нелинейной нормальной формы Шоу–Пьера [3, 6]:

$$\begin{aligned} &\eta_j = \overline{R}_j = a_{j1}\eta_k + a_{j2}\dot{\eta}_k + R_j(\eta_k, \dot{\eta}_k);\\ &\dot{\eta}_j = \overline{F}_j = a_{N+j,1}\eta_k + a_{N+j,2}\dot{\eta}_k + F_j(\eta_k, \dot{\eta}_k),\\ &j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{2}$$

где a_{j1}; a_{j2}; $a_{N+j,1}$; $a_{N+j,2}$ — неизвестные коэффициенты. В качестве независимых координат выбраны η_k, $\dot{\eta}_k$. Нелинейные функции R_j, F_j представим так:

$$\begin{aligned} &R_j(\eta_k, \dot{\eta}_k) = \delta_1^{(j)}\eta_k^3 + \delta_2^{(j)}\eta_k^2\dot{\eta}_k + \delta_3^{(j)}\eta_k\dot{\eta}_k^2 + \delta_4^{(j)}\dot{\eta}_k^3 + \cdots;\\ &F_j(\eta_k, \dot{\eta}_k) = \varepsilon_1^{(j)}\eta_k^3 + \varepsilon_2^{(j)}\eta_k^2\dot{\eta}_k + \varepsilon_3^{(j)}\eta_k\dot{\eta}_k^2 + \varepsilon_4^{(j)}\dot{\eta}_k^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{3}$$

Определим коэффициенты линейной части нелинейной нормальной формы (2) $a_{j,1}$; $a_{j,2}$; $a_{N+j,1}$; $a_{N+j,2}$. Для этого рассмотрим линейную часть системы (1), которую представим так:

$$\dot{z} = \Gamma z, \tag{4}$$

где $z = [z_1, \ldots, z_{2N}] = [\eta, \dot{\eta}]$. Решение системы (4) запишем следующим образом:

$$z = \sum_{j=1}^{N} [\Theta_{2j}W_{2j}\exp(\lambda_{2j}t) + \Theta_{2j-1}W_{2j-1}\exp(\lambda_{2j-1}t)]. \tag{5}$$

Здесь λ_i, W_i — собственные значения и собственные векторы матрицы Γ; $\lambda_{2j} = \overline{\lambda}_{2j-1}$; $W_{2j} = \overline{W}_{2j-1}$; $\Theta_{2j} = \overline{\Theta}_{2j-1}$ — константы интегрирования. Автоколебания, возникающие вследствие бифуркации Хопфа, наблюдаются, если пара комплексно-сопряженных собственных значений матрицы Γ принимает вид $\lambda_{1,2} = \pm i\chi_1$. Решение системы (4) около точки бифуркации Хопфа на центральном многообразии представим так:

$$z = \Theta_2 W_2 \exp(\lambda_2 t) + \Theta_1 W_1 \exp(\lambda_1 t), \tag{6}$$

где $W_1 = \gamma_1 - i\delta_1$; $\gamma_1 = [\gamma_1^{(1)}; \ldots; \gamma_1^{(2N)}]$; $\delta_1 = [\delta_1^{(1)}; \ldots; \delta_1^{(2N)}]$; $\Theta_1 = K_1^{(1)} - iK_1^{(2)}$; $\lambda_1 = \alpha_1 - i\psi_1$.

Два элемента η_k, $\dot{\eta}_k$ вектора z запишем в виде

$$\eta_k = \gamma_1^{(k)}\vartheta_1(t) + \delta_1^{(k)}\vartheta_2(t); \qquad \dot{\eta}_k = \gamma_1^{(N+k)}\vartheta_1(t) + \delta_1^{(N+k)}\vartheta_2(t), \tag{7}$$

где

$$\vartheta_1(t) = 2\exp(\alpha_1 t)[K_1^{(1)}\cos\psi_1 t - K_1^{(2)}\sin\psi_1 t];$$

$$\vartheta_2(t) = -2\exp(\alpha_1 t)[K_1^{(1)}\sin\psi_1 t + K_1^{(2)}\cos\psi_1 t].$$

Остальные элементы решений (6) принимают вид

$$\begin{aligned} &\eta_i = \gamma_1^{(i)}\vartheta_1(t) + \delta_1^{(i)}\vartheta_2(t); \qquad \dot{\eta}_i = \gamma_1^{(N+i)}\vartheta_1(t) + \delta_1^{(N+i)}\vartheta_2(t);\\ &i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{8}$$

Решая совместно уравнения (7) и (8), получаем линейную часть нелинейной нормальной формы (2). Ее коэффициенты определяются следующим образом:

$$a_{i1} = \frac{\gamma_1^{(i)}\delta_1^{(N+k)} - \delta_1^{(i)}\gamma_1^{(N+k)}}{\gamma_1^{(k)}\delta_1^{(N+k)} - \delta_1^{(k)}\gamma_1^{(N+k)}}; \qquad a_{i2} = \frac{\gamma_1^{(i)}\delta_1^{(k)} - \delta_1^{(i)}\gamma_1^{(k)}}{\gamma_1^{(N+k)}\delta_1^{(k)} - \delta_1^{(N+k)}\gamma_1^{(k)}};$$
$$i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N, N+1, \ldots, N+k-1, N+k+1, \ldots, 2N. \tag{9}$$

Итак, линейная часть нелинейной нормальной формы (2) найдена. Теперь определим нелинейную часть нормальной формы.

Уравнения в частных производных, описывающие нелинейную нормальную форму (2), представим так [3]:

$$\left(a_{j1} + \frac{\partial R_j}{\partial \eta_1}\right)\dot{\eta}_1 + \left(a_{j2} + \frac{\partial R_j}{\partial \dot{\eta}_1}\right)\left\{\sum_{l,r,p=1}^{N} G_{lrp}^{(1)}\eta_l\eta_r\eta_p - \sum_{\mu=1}^{N}\alpha_{1\mu}\dot{\eta}_\mu - \sum_{\mu=1}^{N}\beta_{1\mu}\eta_\mu\right\}\Bigg|_{\eta_j=\overline{R}_j;\dot{\eta}_j=\overline{F}_j} =$$
$$= a_{N+j,1}\eta_1 + a_{N+j,2}\dot{\eta}_1 + F_j(\eta_1, \dot{\eta}_1);$$
$$\left\{\sum_{l,r,p=1}^{N} G_{lrp}^{(j)}\eta_l\eta_r\eta_p - \sum_{\mu=1}^{N}\alpha_{j\mu}\dot{\eta}_\mu - \sum_{\mu=1}^{N}\beta_{j\mu}\eta_\mu\right\}\Bigg|_{\eta_j=\overline{R}_j;\dot{\eta}_j=\overline{F}_j} = \left(a_{N+j,1} + \frac{\partial F_j}{\partial \eta_1}\right)\dot{\eta}_1 + \tag{10}$$
$$+ \left(a_{N+j,2} + \frac{\partial F_j}{\partial \dot{\eta}_1}\right)\left\{\sum_{l,r,p=1}^{N} G_{lrp}^{(1)}\eta_l\eta_r\eta_p - \sum_{\mu=1}^{N}\alpha_{1\mu}\dot{\eta}_\mu - \sum_{\mu=1}^{N}\beta_{1\mu}\eta_\mu\right\}\Bigg|_{\eta_j=\overline{R}_j;\dot{\eta}_j=\overline{F}_j};$$
$$j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N,$$

где в фигурные скобки обоих уравнений вводятся соотношения (2). В дальнейшем учтем соотношение

$$\left\{\sum_{l,r,p=1}^{N} G_{lrp}^{(j)}\eta_l\eta_r\eta_p\right\}\Bigg|_{\eta_j=\overline{R}_j;\dot{\eta}_j=\overline{F}_j} = \Gamma_1^{(j)}\eta_1^3 + \Gamma_2^{(j)}\eta_1^2\dot{\eta}_1 + \Gamma_3^{(j)}\eta_1\dot{\eta}_1^2 + \Gamma_4^{(j)}\dot{\eta}_1^3 + \cdots. \tag{11}$$

Значения параметров $\Gamma_i^{(j)}$ здесь не приводятся для краткости.

Система уравнений в частных производных (10) решается приравниванием слагаемых при одинаковых степенях $\eta_1^{j_1}\dot{\eta}_1^{j_2}$ [3]. Приравнивая слагаемые при η_1 и $\dot{\eta}_1$, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов линейной части нелинейной нормальной формы:

$$a_{j1} - \chi_1 a_{j2} = a_{N+j,2}; \qquad -\varsigma_1 a_{j2} = a_{N+j,1};$$
$$\chi_1 a_{N+j,2} - a_{N+j,1} - \sum_{\mu=2}^{N}\alpha_{j\mu}a_{N+\mu,2} - \sum_{\mu=2}^{N}\beta_{j\mu}a_{\mu,2} = \alpha_{j1}; \tag{12}$$
$$\varsigma_1 a_{N+j,2} - \sum_{\mu=2}^{N}\alpha_{j\mu}a_{N+\mu,1} - \sum_{\mu=2}^{N}\beta_{j\mu}a_{\mu,1} = \beta_{j1}; \qquad j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N,$$

где $\chi_1 = \sum\limits_{j=2}^{N} \alpha_{1j} a_{N+j,2} + \sum\limits_{j=2}^{N} \beta_{1j} a_{j2} + \alpha_{11}$; $\varsigma_1 = \sum\limits_{j=2}^{N} \alpha_{1j} a_{N+j,1} + \sum\limits_{j=2}^{N} \beta_{1j} a_{j1} + \beta_{11}$. Неизвестные системы (12) определяются из соотношений (9). Поэтому систему (12) можно не решать; она служит для проверки правильности расчетов по формулам (9).

Теперь в системе (10) приравняем слагаемые при η_1^3; $\eta_1^2\dot{\eta}_1$; $\eta_1\dot{\eta}_1^2$; $\dot{\eta}_1^3$. В результате получим систему $8(N-1)$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (3) $[\delta_1^{(2)}; \delta_2^{(2)}; \ldots; \varepsilon_3^{(N)}; \varepsilon_4^{(N)}]$:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_1^{(j)} + a_{j2}\sum_{\mu=2}^{N} \alpha_{1\mu}\varepsilon_1^{(\mu)} + a_{j2}\sum_{\mu=2}^{N} \beta_{1\mu}\delta_1^{(\mu)} + \varsigma_1\delta_2^{(j)} = a_{j2}\Gamma_1^{(1)};\\
\varepsilon_4^{(j)} + 3\chi_1\delta_4^{(j)} - \delta_3^{(j)} + a_{j2}\sum_{\mu=2}^{N} \beta_{1\mu}\delta_4^{(\mu)} + a_{j2}\sum_{\mu=2}^{N} \alpha_{1\mu}\varepsilon_4^{(\mu)} = a_{j2}\Gamma_4^{(1)};\\
\varepsilon_2^{(j)} + \chi_1\delta_2^{(j)} + 2\varsigma_1\delta_3^{(j)} - 3\delta_1^{(j)} + a_{j2}\sum_{\mu=2}^{N} \beta_{1\mu}\delta_2^{(\mu)} + a_{j2}\sum_{\mu=2}^{N} \alpha_{1\mu}\varepsilon_2^{(\mu)} = a_{j2}\Gamma_2^{(1)};\\
\varepsilon_3^{(j)} + 2\chi_1\delta_3^{(j)} + 3\varsigma_1\delta_4^{(j)} - 2\delta_2^{(j)} + a_{j2}\sum_{\mu=2}^{N} \beta_{1\mu}\delta_3^{(\mu)} + a_{j2}\sum_{\mu=2}^{N} \alpha_{1\mu}\varepsilon_3^{(\mu)} = a_{j2}\Gamma_3^{(1)};\\
-\varsigma_1\varepsilon_2^{(j)} + \sum_{\mu=2}^{N}(\alpha_{j\mu} - a_{N+j,2}\alpha_{1\mu})\varepsilon_1^{(\mu)} + \sum_{\mu=2}^{N}(\beta_{j\mu} - a_{N+j,2}\beta_{1\mu})\delta_1^{(\mu)} = \Gamma_1^{(j)} - a_{N+j,2}\Gamma_1^{(1)};\\
\varepsilon_3^{(j)} - 3\chi_1\varepsilon_4^{(j)} + \sum_{\mu=2}^{N}(\alpha_{j\mu} - a_{N+j,2}\alpha_{1\mu})\varepsilon_4^{(\mu)} + \sum_{\mu=2}^{N}(\beta_{j\mu} - a_{N+j,2}\beta_{1\mu})\delta_4^{(\mu)} = \Gamma_4^{(j)} - a_{N+j,2}\Gamma_4^{(1)};\\
3\varepsilon_1^{(j)} - \chi_1\varepsilon_2^{(j)} - 2\varsigma_1\varepsilon_3^{(j)} + \sum_{\mu=2}^{N}(\beta_{j\mu} - a_{N+j,2}\beta_{1\mu})\delta_2^{(\mu)} +\\
\sum_{\mu=2}^{N}(\alpha_{j\mu} - a_{N+j,2}\alpha_{1\mu})\varepsilon_2^{(\mu)} = \Gamma_2^{(j)} - a_{N+j,2}\Gamma_2^{(1)};\\
2\varepsilon_2^{(j)} - 2\chi_1\varepsilon_3^{(j)} - 3\varsigma_1\varepsilon_4^{(j)} + \sum_{\mu=2}^{N}(\alpha_{j\mu} - a_{N+j,2}\alpha_{1\mu})\varepsilon_3^{(\mu)} + \sum_{\mu=2}^{N}(\beta_{j\mu} - a_{N+j,2}\beta_{1\mu})\delta_3^{(\mu)} =\\
= \Gamma_3^{(j)} - a_{N+j,2}\Gamma_3^{(1)}; \qquad j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (13), определим нелинейную нормальную форму (2), (3).

Теперь по результатам расчета нелинейной нормальной формы исследуем движение на ней. Для этого уравнения (2), (3) введем в k-е уравнение системы (1). В результате получим следующий автономный осциллятор с одной степенью свободы:

$$\ddot{\eta}_k + \chi_1\dot{\eta}_k + \varsigma_1\eta_k = C_1\eta_k^3 + C_2\eta_k^2\dot{\eta}_k + C_3\eta_k\dot{\eta}_k^2 + C_4\dot{\eta}_k^3, \tag{14}$$

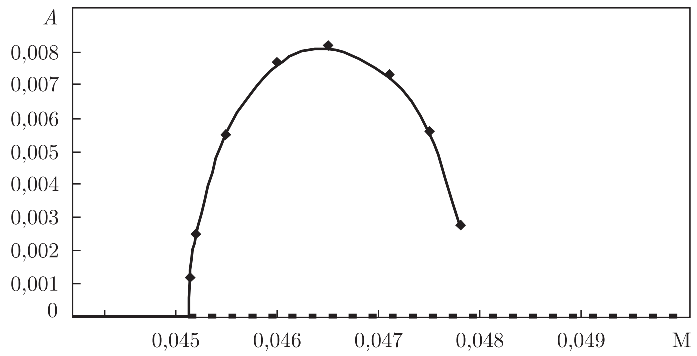

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы

где $C_r = \Gamma_r^{(1)} - \sum\limits_{j=2}^{N}(\alpha_{1j}\varepsilon_r^{(j)} + \beta_{1j}\delta_r^{(j)})$; $r = 1, \ldots, 4$. Для исследования движений в осцилляторе (14) воспользуемся методом гармонического баланса; колебания системы представим так: $\eta_k = A\cos(\omega t)$. Следуя методу гармонического баланса, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно A и ω:

$$A^3(3C_1 + \omega^2 C_3) - 4\varsigma_1 A + 4A\omega^2 = 0; \qquad A^3(\omega C_2 + 3\omega^3 C_4) - 4\chi_1 A\omega = 0.$$

Эта система сводится к биквадратному уравнению относительно ω^2: $3C_4\omega^4 + \omega^2(C_2 + \chi_1 C_3 - 3\varsigma_1 C_4) + (3\chi_1 C_1 - \varsigma_1 C_2) = 0$.

Предложенный подход применялся для исследования автоколебаний шарнирно-опертой пластинки, находящейся в потоке несжимаемой, невязкой жидкости, которая двигается с постоянной скоростью V. Движения пластинки разлагались по собственным формам ее линейных колебаний. В результате применения метода Бубнова–Галеркина к уравнениям Кармана получена система с конечным числом степеней свободы (1). Рассчитывались нелинейные нормальные формы автоколебаний при различных значениях чисел Маха. Результаты расчета представлены на бифуркационной диаграмме (рис. 1), где показана зависимость чисел Маха M от амплитуды колебаний A. При M = 0,0452 наблюдается бифуркация Хопфа; состояние равновесия $\eta = 0$ теряет устойчивость и в системе возникают автоколебания. Амплитуды этих автоколебаний показаны на рис. 1. Для подтверждения правильности определения нелинейных нормальных форм проводилось прямое численное интегрирование системы уравнений (1). Результаты расчета показаны на рис. 1 ромбами. Наблюдается хорошее совпадение результатов прямого численного интегрирования и данных, полученных методом нелинейных нормальных форм.

Итак, в работе предложен подход для анализа автоколебаний механических систем с конечным числом степеней свободы. В математическом отношении применение этого подхода сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений, что значительно проще применения метода гармонического баланса, который сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений. Существенным преимуществом предлагаемого метода является возможность его применения к системами с десятками степеней свободы.

Работа частично поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины в рамках проекта Ф28/257.

1. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – Москва: Наука, 1989. – 240 с.

2. *Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Y. et al.* Normal modes and localization in nonlinear systems. – New York: Wiley, 1996. – 552 p.
3. *Shaw S., Pierre C.* Normal modes for nonlinear vibratory systems // J. Sound and Vibration. – 1993. – No 164. – P. 85–124.
4. *Аврамов К. В.* Применение нелинейных нормальных форм к анализу вынужденных колебаний // Прикл. механика. – 2008. – № 11. – С. 45–51.
5. *Аврамов К. В.* Нелинейные нормальные формы параметрических колебаний // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 41–47.
6. *Аврамов К. В., Пьерр К., Ширяева Н. С.* Нелинейные нормальные формы колебаний систем с гироскопическими силами // Там само. – 2006. – № 11. – С. 7–10.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 12.05.2010

K. V. Avramov, E. A. Strel'nikova

Nonlinear normal modes of self-sustained vibrations of finite-degree-of-freedom mechanical systems

A version of the method of nonlinear normal modes of self-sustained vibrations of finite-degree-of-freedom mechanical systems is suggested. One general coordinate and one general velocity are taken as independent variables to construct nonlinear normal modes. As an example, a plate interacting with moving fluid is considered.