УДК 534-16.534-21

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Змішана система рівнянь коливань анізотропних тіл з однією площиною симетрії пружних властивостей (моноклінна система) і її властивості

Одержано змішані системи рівнянь в операторній формі Коші за просторовими координатами для анізотропних середовищ із однією площиною симетрії пружних властивостей. За перпендикулярною до площини симетрії координатою отримана система зведена до операторної гамільтонової форми.

У роботах [1–4 та ін.] рівняння коливань і шість матеріальних співвідношень для ортотропного пружного тіла зведено до змішаної системи шести рівнянь відносно переміщень і трьох відповідним чином вибраних напружень. У [5] вперше було показано, що такі системи є гамільтоновими операторними системами за просторовою координатою з належним чином вибраними гамільтоновими змінними і відповідною операторною функцією Гамільтона. У даній роботі отриманий більш загальний результат для матеріалів з однією площиною симетрії пружних постійних (моноклінна система). Показано, що змішану систему рівнянь лише за перпендикулярною до площини симетрії координатою можна зобразити у формі операторної гамільтонової системи; за координатами у площині симетрії таке зображення одержати не вдається.

У декартовій прямокутній системі координат x_1, x_2, x_3 рівняння коливань

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=\rho(x_3)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}=\rho(x_3)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=\rho(x_3)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}
\end{aligned}\tag{1}$$

для анізотропних матеріалів з однією площиною симетрії $x_3=\mathrm{const}$ пружних властивостей (кристали моноклінної системи) замикаються матеріальними залежностями [6]

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}=c_{11}(x_3)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{12}(x_3)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+c_{13}(x_3)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+c_{16}(x_3)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\\
&\sigma_{22}=c_{21}(x_3)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{22}(x_3)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+c_{23}(x_3)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+c_{26}(x_3)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\\
&\sigma_{33}=c_{31}(x_3)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{32}(x_3)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+c_{33}(x_3)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+c_{36}(x_3)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\\
&\sigma_{23}=c_{44}(x_3)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)+c_{45}(x_3)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),
\end{aligned}\tag{2}$$

$$\sigma_{31} = c_{54}(x_3)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + c_{55}(x_3)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),$$

$$\sigma_{12} = c_{61}(x_3)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{62}(x_3)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{63}(x_3)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + c_{66}(x_3)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right).$$

1. Виберемо за основні (розв'язуючі) функції переміщення u_1, u_2, u_3 і напруження σ_{31}, σ_{32}, σ_{33}, які при досконалому механічному контакті залишаються неперервними на площинах $x_3 = \mathrm{const}$ розриву механічних властивостей середовища. Після відповідних перетворень із залежностей (1), (2) одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2},\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{c_{44}}{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}\sigma_{13} - \frac{c_{45}}{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}\sigma_{23},\\
&\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{c_{45}}{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}\sigma_{13} + \frac{c_{55}}{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}\sigma_{23},\\
&\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\sigma_{33}}{c_{33}} - \frac{c_{31}}{c_{33}}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{c_{36}}{c_{33}}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{c_{36}}{c_{33}}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{c_{32}}{c_{33}}\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\\
&\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = -\frac{c_{13}}{c_{33}}\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_1} - \frac{c_{63}}{c_{33}}\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_2} + \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_{11*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - 2c_{16*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} -\\
&\qquad - c_{66*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - c_{16*}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - (c_{12*} + c_{66*})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - c_{62*}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2},\\
&\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = -\frac{c_{63}}{c_{33}}\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_1} - \frac{c_{23}}{c_{33}}\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_2} - c_{61*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - (c_{66*} + c_{21*})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} -\\
&\qquad - c_{26*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c_{66*}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - 2c_{26*}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - c_{22*}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Тут і далі аргументи у функцій $\rho(x_3)$, $c_{ij}(x_3)$ опущені.

Напруження σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, що не ввійшли в систему (3), визначаються через розв'язуючі функції u_1, u_2, u_3, σ_{31}, σ_{32}, σ_{33} за формулами

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = \frac{c_{13}}{c_{33}}\sigma_{33} + c_{11*}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{16*}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + c_{16*}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + c_{12*}\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\\
&\sigma_{22} = \frac{c_{23}}{c_{33}}\sigma_{33} + c_{21*}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{26*}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + c_{26*}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + c_{22*}\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\\
&\sigma_{12} = \frac{c_{63}}{c_{33}}\sigma_{33} + c_{61*}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{62*}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{66*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right).
\end{aligned} \tag{4}$$

У залежностях (3), (4) використовуються позначення

$$c_{6k*} = c_{6k} - \frac{c_{k3}c_{3k}}{c_{33}}, \qquad c_{1k*} = c_{1k} - \frac{c_{31}c_{k3}}{c_{33}}, \qquad c_{2k*} = c_{2k} - \frac{c_{23}c_{3k}}{c_{33}}, \qquad k = 1, 2, 6. \tag{5}$$

Система (3) записана в операторній нормальній формі Коші за просторовою координатою x_3. Таке подання особливо доцільно при заданні граничних умов і умов спряження на площинах $x_3 = \mathrm{const}$.

Коефіцієнти системи (3), а значить модулі пружності c_{ij} і густина ρ, через які вони виражаються, можуть бути довільними функціями координати x_3 з розривами першого роду. На площинах цих розривів слід вимагати неперервності переміщень u_1, u_2, u_3 і напружень σ_{31}, σ_{32}, σ_{33}.

Покажемо, на підставі результатів роботи [5], що система рівнянь (3) є операторною гамільтоновою системою [7] за просторовою координатою x_3

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_3} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial x_3} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial q_i}, \tag{6}$$

якщо за канонічні гамільтонові змінні q_i, p_i вибрати функції $\mathbf{q} = [\sigma_{33}, u_1, u_2]^T$, $\mathbf{p} = [u_3, \sigma_{31}, \sigma_{32}]^T$.

Для цього операторну функцію Гамільтона досить взяти у вигляді

$$2\widehat{H} = \widehat{P}_{ij} q_i q_j + \widehat{Q}_{ij} p_i p_j, \tag{7}$$

де елементи симетричних операторних матриць $\widehat{P}_{ij}$, $\widehat{Q}_{ij}$ мають вигляд

$$\begin{gathered}
\widehat{Q}_{11} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad \widehat{Q}_{12} = \widehat{Q}_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \widehat{Q}_{13} = \widehat{Q}_{31} = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \\
\widehat{Q}_{22} = \frac{c_{44}}{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}, \qquad \widehat{Q}_{23} = \widehat{Q}_{32} = -\frac{c_{45}}{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}, \qquad \widehat{Q}_{33} = \frac{c_{55}}{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}, \\
-\widehat{P}_{11} = \frac{1}{c_{33}}, \qquad -\widehat{P}_{12} = -\widehat{P}_{21} = -\frac{c_{31}}{c_{33}}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{c_{36}}{c_{33}}\frac{\partial}{\partial x_2}, \\
-\widehat{P}_{13} = -\widehat{P}_{31} = -\frac{c_{36}}{c_{33}}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{c_{32}}{c_{33}}\frac{\partial}{\partial x_2}, \\
-P_{22} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_{11*}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2c_{16*}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - c_{66*}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \\
-P_{23=} = -P_{32} = -c_{16*}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - (c_{12*} + c_{66*})\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - c_{62*}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \\
-P_{33} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_{66*}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2c_{26*}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - c_{22*}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Диференціальні оператори $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_2$ слід вважати замороженими (постійними).

Операторну канонічну гамільтонову систему (3) можна одержати з умови стаціонарності по u_i, σ_{3i} функціонала

$$\begin{aligned}
\Phi(\sigma_{33}, u_1, u_2, u_3, \sigma_{31}, \sigma_{32}) = \int\limits_{x_{3,1}}^{x_{3,2}} \biggl(& u_3 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \sigma_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \sigma_{32}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \\
& - \frac{1}{2}\widehat{P}_{11}\sigma_{33}\sigma_{33} - \widehat{P}_{12}\sigma_{33}u_1 - \widehat{P}_{13}\sigma_{33}u_2 - \frac{1}{2}\widehat{P}_{22}u_1^2 - \widehat{P}_{23}u_1u_2 - \frac{1}{2}\widehat{P}_{33}u_2^2 - \\
& - \frac{1}{2}\widehat{Q}_{11}u_3^2 - \widehat{Q}_{12}\sigma_{13}u_3 - \widehat{Q}_{13}\sigma_{23}u_3 - \frac{1}{2}\widehat{Q}_{22}\sigma_{13}^2 - \widehat{Q}_{23}\sigma_{13}\sigma_{23} - \frac{1}{2}\widehat{Q}_{33}\sigma_{23}^2 \biggr) dx_3
\end{aligned} \tag{9}$$

при "ізохронних" варіаціях. При здійсненні варіювання оператори $\widehat{P}_{ij}$ й $\widehat{Q}_{ij}$ слід вважати замороженими.

2. Виберемо тепер як основні розв'язуючі функції переміщень u_1, u_2, u_3 і напружень σ_{11}, σ_{12}, σ_{13}, які при досконалому механічному контакті залишаються неперервними на площинах $x_1 = \text{const}$ розриву властивостей середовища. Після відповідних перетворень із рівнянь (1), (2) одержимо систему

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3},\\
&\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{c_{61}}{c_{11*}}\sigma_{11} + \left(\frac{c_{61}}{c_{66}}\frac{c_{12*}}{c_{11*}} - \frac{c_{62}}{c_{66}}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left(\frac{c_{61}}{c_{66}}\frac{c_{13*}}{c_{11*}} - \frac{c_{63}}{c_{66}}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} +\\
&\qquad + \left(\frac{1}{c_{66}} + \frac{c_{16}^2}{c_{66}c_{11*}}\right)\sigma_{12},\\
&\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{c_{54}}{c_{55}}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{c_{54}}{c_{55}}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\sigma_{31}}{c_{55}},\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{c_{66}}{c_{11*}}\sigma_{11} - \frac{c_{12*}}{c_{11*}}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{c_{13*}}{c_{11*}}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{c_{16}}{c_{11*}}\sigma_{12},\\
&\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = -\frac{c_{12*}}{c_{11*}}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} + \left(\frac{c_{12*}^2}{c_{11*}c_{66}} - \frac{c_{22*}}{c_{66}}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \frac{1}{s_{55}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} +\\
&\qquad + \left(\frac{c_{13*}c_{12*}}{c_{11*}c_{66}} - \frac{c_{23*}}{c_{66}} - \frac{1}{s_{55}}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \left(\frac{c_{12*}c_{16}}{c_{11*}c_{66}} - \frac{c_{26}}{c_{66}}\right)\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} - \frac{c_{45}}{c_{55}}\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3},\\
&\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = -\frac{c_{13*}}{c_{11*}}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_3} + \left(\frac{c_{12*}c_{13*}}{c_{11*}c_{66}} - \frac{c_{23*}}{c_{66}} - \frac{1}{s_{55}}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{1}{s_{55}}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} +\\
&\qquad + \left(\frac{c_{13*}^2}{c_{11*}c_{66}} - \frac{c_{33*}}{c_{66}}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \left(\frac{c_{13*}c_{16}}{c_{11*}c_{66}} - \frac{c_{36}}{c_{66}}\right)\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} - \frac{c_{45}}{c_{55}}\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

де використовуються позначення $c_{ij*} = c_{ij}c_{66} - c_{6i}c_{6j}$, i, $j = 1, 2, 3$, $s_{55} = c_{55}/(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)$.

Напруження σ_{22}, σ_{33}, σ_{23}, які не ввійшли в систему (10), знаходяться через визначальні функції u_i, σ_{1i}, $i = 1, 2, 3$, за формулами

$$
\begin{aligned}
\sigma_{22} &= \frac{c_{21*}}{c_{66}}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{c_{22*}}{c_{66}}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{c_{23*}}{c_{66}}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{c_{26}}{c_{66}}\sigma_{12},\\
\sigma_{33} &= \frac{c_{31*}}{c_{66}}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{c_{32*}}{c_{66}}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{c_{33*}}{c_{66}}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{c_{36}}{c_{66}}\sigma_{12},\\
\sigma_{23} &= \frac{c_{21*}}{c_{66}}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{c_{22*}}{c_{66}}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{c_{23*}}{c_{66}}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{c_{26}}{c_{66}}\sigma_{12}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

У системі (10) коефіцієнти пружності c_{ij} і густина ρ можуть бути довільними функціями координати x_1 з розривами першого роду. На площинах цих розривів слід вимагати неперервності переміщень u_1, u_2, u_3 і напружень σ_{11}, σ_{12}, σ_{13}.

Система (10) записана в операторній формі Коші. Таке зображення системи (10) хоча й має певну симетрію підматриць, але звести її до операторної гамільтонової форми не вдається.

Аналогічний результат можна одержати і за просторовою координатою x_2, якщо за розв'язуючі функції вибрати переміщення u_1, u_2, u_3 і напруження σ_{22}, σ_{21}, σ_{23}.

1. *Шульга Н. А.* Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 7. – С. 15–56.
2. *Шульга Н. А.* Распространение связанных волн в периодически-неоднородных средах при взаимодействии с электромагнитным полем // Там же. – 2003. – **39**, № 10. – С. 38–68.
3. *Shulga N. A.* Theory of dynamical processes in mechanical systems and materials of regular structures // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, № 12. – P. 1301–1330.
4. *Шульга Н. А.* Об одной смешанной системе уравнений теории упругости // Там же. – 2010. – **46**, № 3. – С. 25–29.
5. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
6. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. – Москва: Наука, 1982. – 424 с.
7. *Павловський М.*А. Теоретична механіка. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 24.06.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shulga**

A mixed system of equations of vibrations of anisotropic bodies with one plane of symmetry of elastic properties (monoclinic system) and its properties

The mixed system of equations in the operator form of Cauchy in spatial coordinates for anisotropic media with one plane of symmetry of elastic properties is deduced. On a coordinate perpendicular to the plane of symmetry, the obtained system is represented in the operator Hamilton form.