ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

А. К. Бахтин

Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Отримано метод узагальнення результатів геометричної теорії функцій комплексного змінного на багатовимірні комплексні простору. Зокрема, в роботі наведені аналоги двох відомих теорем теорії однолистих функцій.

1. Пространство $\mathbb{C}^n$. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — соответственно множества натуральных, вещественных и комплексных чисел. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ — сфера Римана (расширенная комплексная плоскость).

Как известно [1–3], комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ является линейным векторным пространством над полем комплексных чисел с эрмитовым скалярным произведением

$$(\mathbb{Z} \cdot \mathbb{W}) = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k, \tag{1}$$

где $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$.

2. Алгебра $\mathbb{C}^n$.

Определение 1. Бинарную операцию, действующую из $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$ по правилу

$$\mathbb{Z} \cdot \mathbb{W} = \{z_k w_k\}_{k=1}^n, \tag{2}$$

где $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, будем называть *векторным умножением элементов* $\mathbb{C}^n$. Данная операция превращает $\mathbb{C}^n$ в коммутативную, ассоциативную алгебру [3] с единицей $\mathbf{1} = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n\text{-раз}} \in \mathbb{C}^n$.

Обратимыми относительно так определенной операции умножения являются те и только те елементы $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, у которых $z_k \neq 0$ для всех $k = \overline{1, n}$.

Обратными для таких элементов $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n$ являются элементы $\mathbb{Z}^{-1} = \{z_k^{-1}\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, так как $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}^{-1} = \mathbb{Z}^{-1} \cdot \mathbb{Z} = 1$. Множество Θ всех элементов $a = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, у которых хотя бы одна координата $a_k = 0$, назовем множеством необратимых элементов $a \in \mathbb{C}^n$.

Множество Θ является идеалом в алгебре $\mathbb{C}^n$. При $n = 1$ равенство (2) задает обычное умножение комплексных чисел.

Хорошо известно (см., напр., [7, с. 138; 8, с. 345]), что операция умножения (2) позволяет представить $\mathbb{C}^n$ как прямую сумму n экземпляров алгебры комплексных чисел $\mathbb{C}$. Структура векторного пространства $\mathbb{C}^n$ полностью согласуется со структурой алгебры $\mathbb{C}^n$.

Дадим несколько определений, превращающих алгебру $\mathbb{C}^n$ в алгебру со свойствами, аналогичными свойствам алгебры обычных комплексных чисел.

3. Сопряжение. В алгебре комплексных чисел $\mathbb{C}$ важную роль имеет понятие комплексно сопряженного числа. Приведем аналогичный объект в алгебре $\mathbb{C}^n$.

Определение 2. Каждому элементу $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ поставим в соответствие векторно-сопряженный элемент $\overline{\mathbb{W}} = \{\overline{w}_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, где $\overline{w}_k$ обозначает число, комплексно сопряженное w_k в обычном смысле. Так определенное соответствие задает автоморфизм $\mathbb{C}^n$, оставляющий неподвижным подпространство $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. При $n = 1$ векторно-сопряженное число совпадает с комплексно сопряженным.

4. Модуль (векторный). В алгебре $\mathbb{C}$ одним из важнейших является понятие модуля комплексного числа. Следующее определение дает аналог этого понятия в $\mathbb{C}^n$. Пусть $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ (см. [2, с. 16]).

Определение 3. Векторным модулем произвольного элемента $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ будем называть вектор $|\mathbb{Z}| := \{|z_k|\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}_+^n$.

Операция перехода к векторному модулю определяет отображение $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{R}_+^n$. Это отображение в комплексном анализе используется, в частности, для получения изображения Реинхарта областей в $\mathbb{C}^n$ (см., напр., [2, с. 16]). Важно, что для произвольного $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ справедливо равенство

$$\mathbb{Z} \cdot \overline{\mathbb{Z}} = |\overline{\mathbb{Z}}|^2 = |\mathbb{Z}|^2. \tag{3}$$

При $n = 1$ векторный модуль совпадает с обычным модулем комплексного числа, формула (3) совпадает с аналогичной формулой для комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определяемой с помощью скалярного произведения (1).

5. Векторная норма.

Определение 4. Вектор $\mathbb{X} = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ будем называть неотрицательным (строго положительным) и писать $\mathbb{X} \geqslant \mathbb{O}$ ($\mathbb{X} > \mathbb{O}$), если $x_k \geqslant 0$ для всех $k = \overline{1, n}$ ($x_k > 0$ хотя бы для одного $k = \overline{1, n}$), $\mathbb{O} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n\text{-раз}}$.

Определение 5. Будем говорить, что вектор $\mathbb{X} = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ больше вектора $\mathbb{Y} = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ либо равен ему (строго больше), если $\mathbb{X} - \mathbb{Y} \geqslant \mathbb{O}$ ($\mathbb{X} - \mathbb{Y} > \mathbb{O}$).

Данные определения при $n = 1$ совпадают с соответствующими определениями на вещественной прямой. При $n > 1$ ситуация существенно отличается от случая $n = 1$, например, вектор $\mathbb{O} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n\text{-раз}}$ больше всех векторов, все координаты которых неположительны, либо равен им и меньше всех векторов из $\mathbb{R}_+^n$ либо равен им. Остальные векторы $\mathbb{R}^n$, у которых координаты разных знаков с вектором $\mathbb{O}$ не сравнимы в смысле определений 4 и 5.

Определение 6. Векторное пространство $\mathbb{Y}$ будем называть векторно нормированным, если каждому $y \in \mathbb{Y}$ сопоставлен неотрицательный вектор $\|y\| \in \mathbb{R}_+^n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\|y\| \geqslant \mathbb{O}$, причем $\|y\| = \mathbb{O} \iff y = 0_{\mathbb{Y}}$ ($0_{\mathbb{Y}}$ — нуль пространства $\mathbb{Y}$);

2) $\|\gamma y\| = |\gamma|\|y\|$, $\forall\, y \in \mathbb{Y}$, $\forall\, \gamma \in \mathbb{C}$;

3) $\|y_1 + y_2\| \leqslant \|y_1\| + \|y_2\|$, $\forall\, y_1,\, y_2 \in \mathbb{Y}$.

Аналогично можно ввести понятие векторной метрики. Введенное ранее понятие векторного модуля элемента $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n$ удовлетворяет определению 6. Таким образом, векторный модуль является векторной нормой в алгебре $\mathbb{C}^n\colon \|\cdot\| = |\cdot|$. Тогда открытым единичным шаром в алгебре $\mathbb{C}^n$ является единичный открытый поликруг $\|z\| < 1$ $(1 = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n\text{-раз}})$, а единичной сферой — n-мерный тор — $\mathbb{T}^n = \{\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n\colon \|Z\| = 1\}$. Очень важно, что

а) $|Z_1 \cdot Z_2| = \|Z_1 \cdot Z_2\| = \|Z_1\|\|Z_2\| = |Z_1||Z_2|$, $\forall Z_1,\, Z_2 \in \mathbb{C}^n$;

б) $|1| = \|1\| = 1$ $(1 = (1, 1, \ldots, 1))$.

При $n = 1$ равенства а и б совпадают с аналогичными равенствами на комплексной плоскости. Заметим, что для евклидовой нормы $\|\cdot\|_E$, определяемой скалярным произведением (1), справедливо равенство

$$\|1\|_E = \sqrt{n}.$$

6. Векторный аргумент $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$. В дальнейшем вектор (произвольный) пространства (алгебры) $\mathbb{C}^n$ будем называть n-мерным комплексным числом. Таким образом, алгебра $\mathbb{C}^n$ будет называться алгеброй n-мерных комплексных чисел.

Определение 7. Векторным аргументом n-мерного комплексного числа $\mathbb{A} = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n \setminus \Theta$ является n-мерный вещественный вектор, определяемый формулой

$$\arg \mathbb{A} = \{\arg a_k\}_{k=1}^n, \tag{4}$$

где $\arg a_k$ есть главное значение аргумента, либо то, которое вытекает из конкретного смысла задачи, в которой фигурирует n-мерное комплексное число $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^n$.

7. Представление n-мерного комплексного числа в векторно-декартовой форме. Пусть $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n = \{\operatorname{Re} z_k + i \operatorname{Im} z_k\}_{k=1}^n = \{\operatorname{Re} z_k\}_{k=1}^n + \{i \operatorname{Im} z_k\}_{k=1}^n = \\ = \{\operatorname{Re} z_k\}_{k=1}^n + i\{\operatorname{Im} z_k\}_{k=1}^n = \operatorname{Re} \mathbb{Z} + i \operatorname{Im} \mathbb{Z} = X + iY = \\ = \{x_k\}_{k=1}^n + i\{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

где $X = \operatorname{Re} \mathbb{Z} = \{\operatorname{Re} z_k\}_{k=1}^n = \{x_k\}_{k=1}^n$, $Y = \operatorname{Im} \mathbb{Z} = \{\operatorname{Im} z_k\}_{k=1}^n = \{y_k\}_{k=1}^n$. То есть $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$.

8. Представление n-мерного комплексного числа в векторно-полярной форме. Используя вышеприведенные определения, получим цепочку равенств:

$$\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n = \{|z_k| e^{i\alpha_k}\}_{k=1}^n = \{|z_k|\}_{k=1}^n \{e^{i\alpha_k}\}_{k=1}^n = |\mathbb{Z}|[\cos \arg \mathbb{Z} + i \sin \arg \mathbb{Z}] = |\mathbb{Z}| e^{i \arg \mathbb{Z}},$$

где

$$\cos\beta = \{\cos\beta_k\}_{k=1}^n, \qquad \sin\beta = \{\sin\beta_k\}_{k=1}^n, \qquad \exp i\beta = \{\exp i\beta_k\}_{k=1}^n,$$
$$\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n.$$

Аналогичным образом определяется отображение $\ln \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n \setminus \Theta$

$$\ln \mathbb{Z} = \ln |\mathbb{Z}| + i \arg \mathbb{Z} = \{\ln |z_k| + i \arg z_k\}_{k=1}^n.$$

Более того, для регулярной в областях $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$, $B_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, функции $F(z)$ комплексного переменного определим продолжение этой функции до голоморфного отображения области $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$ по следующему правилу

$$\mathbb{F}(\mathbb{W}) = \{F(W_k)\}_{k=1}^n, \qquad \mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{B}.$$

9. Компактификация $\mathbb{C}^n$. По определению $\mathbb{C}^n = \underbrace{(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C})}_{n\text{-раз}}$. Рассмотрим компактификацию пространства $\mathbb{C}^n$, далее так называемое пространство теории функций (см., напр., [1–3]) $\overline{\mathbb{C}}^n = \underbrace{(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{C}})}_{n\text{-раз}}$. Ясно, что $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}^1 = \overline{\mathbb{C}}$. Бесконечными точками $\overline{\mathbb{C}}^n$ являются те точки, у которых хотя бы одна координата бесконечна. Множество всех бесконечных точек имеет комплексную размерность $n-1$.

Топология в $\overline{\mathbb{C}}^n$ вводится как в декартовом произведении топологических пространств. В этой топологии $\overline{\mathbb{C}}^n$ компактно (см. [1–3]).

10. Полицилиндрическая теорема Римана об отображении в $\overline{\mathbb{C}}^n$. Область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется областью гиперболического типа, если ∂B (граница B) — связное множество, содержащее более одной точки. Область $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, где каждая область $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, является областью гиперболического типа, будем называть полицилиндрической областью гиперболического типа.

Непосредственно из классической теоремы Римана об отображении односвязной области гиперболического типа на единичный круг (см. [6]) вытекает следующий результат.

Теорема Римана (полицилиндрическая). *Любая полицилиндрическая область $\mathbb{B} \subset \overline{\mathbb{C}}^n$ гиперболического типа биголоморфно эквивалентна единичному поликругу $\mathbb{U}^n = \{\mathbb{W} \in \mathbb{C}^n \colon \|\mathbb{W}\| < 1\}$. Эту эквивалентность реализует семейство биголоморфных отображений, зависящее от $3 \cdot n$ вещественных параметров.*

Пусть $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$ — область, указанная в теореме Римана, $\mathbb{A} = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{B}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, и $w_k = f_k(z_k)$ — голоморфная в B_k функция, однолистно и конформно отображающая область B_k, $k = \overline{1,n}$, на единичный круг $|w_k| < 1$ так, что $f(a_k) = 0$, $f'(a_k) > 0$.

Тогда биголоморфное отображение $\mathbb{F}_{\mathbb{B}}(\mathbb{Z}) = \{f_k(z_k)\}_{k=1}^n$, $\mathbb{F}'_{\mathbb{B}}(\mathbb{Z}) = \{f'_k\}_{k=1}^n$, удовлетворяет условиям нормировки

$$\mathbb{F}_{\mathbb{B}}(\mathbb{A}) = \mathbb{O}, \qquad \mathbb{F}'_{\mathbb{B}}(\mathbb{A}) = \{f'_k(a_k)\}_{k=1}^n > \mathbb{O}$$

и будет единственным таким отображением на единичный поликруг.

Итак, в алгебре $\mathbb{C}^n$ норма определена равенством $\|\mathbb{Z}\| := |\mathbb{Z}|$. Метрика (векторная) в $\mathbb{C}^n$ задается обычным образом: $\rho(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2) = \|\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2\|$. Назовем так определенные (векторные) норму и метрику полицилиндрическими. Сходимость по полицилиндрической норме задается соотношением $\mathbb{Z}_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \|\mathbb{Z}_p\| \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{O} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n\text{-раз}} \Longleftrightarrow |z_p^{(k)}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \forall k = \overline{1,n}$.

Совершенно ясно, как можно определить векторный аналог скалярного произведения.

11. Приложения. В связи с полицилиндрической теоремой Римана об отображении рассмотрим полицилиндрический аналог известного класса S из теории однолистных функций (см., напр., [6]).

Определение 9. Классом $\mathbb{S}^{(n)}$ назовем совокупность всех биголоморфных отображений единичного поликруга $\mathbb{U}^n = \{\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n \colon \|\mathbb{Z}\| < 1\}$ вида $\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \{f_k(z_k)\}_{k=1}^n$, где $f_k \in S$, $k = \overline{1,n}$, $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{U}^n$.

Ясно, что для $\mathbb{Z} \in \overline{\mathbb{U}}^n(r) := \{\|\mathbb{Z}\| \leqslant r < 1\}$, $r = \{r_k\}_{k=1}^n$, $0 < r_k < 1$, $k = \overline{1,n}$, равномерно и абсолютно сходится ряд

$$\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{A}_k \mathbb{Z}^k = \sum \{a_k^{(k)}\}_{k=1}^n \{z_k^n\}_{k=1}^n = \left\{\sum a_k^{(k)} z_k^n\right\}_{k=1}^n = \{f_k(z_k)\}_{k=1}^n.$$

Теорема 1. *Для произвольного отображения* $\mathbb{F} \in \mathbb{S}^{(n)}$ *справедливо неравенство*

$$\frac{\|\mathbb{Z}\|}{(1+\|\mathbb{Z}\|)^2} \leqslant \|\mathbb{F}(\mathbb{Z})\| \leqslant \frac{\|\mathbb{Z}\|}{(1-\|\mathbb{Z}\|)^2},$$

где $\|\mathbb{Z}\| = r = \{|z_k|\}_{k=1}^n = \{|r_k|\} \in \mathbb{R}_+^n$, $0 \leqslant r_k < 1$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 2. *Для произвольного отображения* $\mathbb{F} \in \mathbb{S}^{(n)}$ *справедливо неравенство*

$$\frac{\|1-\mathbb{Z}\|}{(1+\|\mathbb{Z}\|)^3} \leqslant \|\mathbb{F}'(\mathbb{Z})\| \leqslant \frac{\|1+\mathbb{Z}\|}{(1-\|\mathbb{Z}\|)^3},$$

где $\|\mathbb{Z}\| = r = \{|z_k|\}_{k=1}^n = \{|r_k|\} \in \mathbb{R}_+^n$, $0 \leqslant r_k < 1$, $k = \overline{1,n}$.

1. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. I. – Москва: Наука, 1976. – 320 с.
2. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. II. – Москва: Наука, 1976. – 400 с.
3. *Фукс Б. В.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. – Москва: Физматгиз, 1962. – 420 с.
4. *Фукс Б. В.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. – Москва: Физматгиз, 1963. – 428 с.
5. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества. – Москва: Наука, 1985. – 272 с.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
7. *Кантор И. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. – Москва: Наука, 1973. – 143 с.
8. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – Москва: Наука, 1976. – 648 с.
9. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – Москва: Наука, 1969. – 432 с.
10. *Пешкичев Ю. А.* Многомерный градиент и квазиконформные отображения // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 99–109.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 05.08.2010

A. K. Bakhtin

A generalization of some results of the theory of schlicht functions of multidimensional complex spaces

The method of generalization of results of the geometric theory of functions of complex variable to multidimensional complex spaces is proposed. In particular, the analogs of two known theorems of the theory of schlicht functions are presented.