УДК 517.925

© 2011

О. С. Бичков

Про стійкість нечітких динамічних систем

(Представлено академіком НАН України А. А. Мартинюком)

Розглянуто питання про стійкість положення рівноваги нечіткої динамічної системи. Для встановлення стійкості використано звичайні та нечіткі функції Ляпунова. Доведено теореми про стійкість.

Методи теорії можливостей дають змогу оцінити рівень істини певної події по відношенню до інших подій на основі суб'єктивних думок експертів. Ці методи корисні для міркування про невизначені процеси або явища у разі, коли недостатність статистичної інформації не дозволяє застосовувати ймовірнісні методи. Розв'язання таких задач, як прогнозування розвитку соціально-економічного явища, моделювання складної динаміки польоту, часто вимагає використання диференціальних рівнянь, які містять деяку невизначеність. У таких областях статистичні дані ненадійні або відсутні, тому доцільно застосовувати теоретико-можливісні підходи.

Останнім часом активізувалося дослідження нечіткої динаміки. Загальновідомим формалізмом для опису такої динаміки є теорія нечітких множин Заде. На базі цього формалізму у роботах [1–4] побудовано нечіткі диференціальні рівняння. Необхідно зазначити, що формалізм Заде не дозволяє вивчати динаміку нечіткої траєкторії у фазовому просторі.

Інший підхід для опису нечіткої динаміки запропоновано в роботах [5–9]. У [6] описано формальний аналог стохастичного диференціального рівняння Іто, у [7–9] на базі теорії можливостей побудовано клас нечітких диференціальних рівнянь, що мають нові властивості.

У цій роботі за допомогою методу функцій Ляпунова досліджується стійкість стаціонарних станів нечітких динамічних систем.

Основний результат. Позначимо $R^+ = [0, +\infty)$ і покладемо $Y = R^n$. Введемо до розгляду можливісний простір $(X, \mathcal{A}, P)$, де X — простір елементарних подій, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, P — міра можливості [9].

Для всіх $\varepsilon \in R^+$ введемо такі позначення:

$$S(\varepsilon) = \{y \in Y \mid \|y\| = \varepsilon\}; \qquad B(\varepsilon) = \{y \in Y \mid \|y\| \leqslant \varepsilon\};$$

$$X_+ = \{x \in X \mid P\{x\} > 0\}; \qquad X_\varepsilon = \{x \in X \mid P\{x\} \geqslant \varepsilon\}.$$

Нехай $V\colon Y \to R^+$ — додатно визначена неперервна функція. Для всіх $v \in R^+$ введемо такі позначення:

$L_V(v) = \{y \in Y \mid V(y) \leqslant v\}$, $cL_V(v)$ — компонента зв'язності множини $L_V(v)$, яка містить 0-вектор.

Означення 1. Нечіткою динамічною системою (НДС) $y(y_0, t, x)$ називається відображення $y\colon Y \times R^+ \times X \to Y$, для якого $y(y_0, t_0, x) = y_0$.

Означення 2. Розв'язок $y(\overline{y}_0, t, \overline{x})$ нечіткої динамічної системи $y(y_0, t, x)$ називається стійким з рівнем $\alpha(\varepsilon)$, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\alpha(\varepsilon) < 1$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $\|y_0 - \overline{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$ для $\overline{x} \in X_\alpha$ виконується $\|y(y_0, t, x) - y(\overline{y}_0, t, \overline{x})\| < \varepsilon$.

Лема 1. *Для кожного $\varepsilon \in R^+$ множина $cK_V(\varepsilon) = \{v \in R^+ \mid cL_V(v) \subseteq B(\varepsilon)\}$ непорожня і обмежена.*

Доведення. У випадку $\varepsilon = 0$ $K_V(\varepsilon) = cK_V(\varepsilon) = \{0\}$, оскільки функція V додатно визначена, то твердження леми виконується.

Оберемо довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки $0 \in cK_V(\varepsilon)$, то множина $cK_V(\varepsilon)$ непорожня. Покладемо $v^* = \max\limits_{y \in B(2\varepsilon)} V(y)$. Тоді для кожного числа $\overline{v} \geqslant v^*$ маємо, що $B(2\varepsilon) \subseteq L_V(\overline{v})$. Звідси випливає, що $B(2\varepsilon) \subseteq cL_V(\overline{v})$. Тому не виконується включення $cL_V(\overline{v}) \subseteq B(\varepsilon)$. Отже, $\sup cK_V(\varepsilon) \leqslant v^*$, тому множина $cK_V(\varepsilon)$ обмежена.

Лему доведено.

Введемо до розгляду нечітку динамічну систему $y\colon Y \times R^+ \times X \to Y$ таку, що

а) $y(0;t;x) \equiv 0$ для всіх $t \geqslant 0$ і $x \in X_+$;

б) для деякого числа $\gamma > 0$ функція $t \mapsto y(y_0;t;x)$ визначена і неперервна на R^+ для всіх $x \in X_+$ і $y_0 \in B(\gamma)$.

Нехай $\alpha\colon R^+ \to [0,1)$ — визначена в околі нуля функція, $\psi\colon (0,1] \to R^+$ — частково визначена функція, що задана умовами:

а) $\psi(p) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid \alpha(\varepsilon) \leqslant p\}$, якщо $\{\varepsilon \geqslant 0 \mid \alpha(\varepsilon) \leqslant p\} \neq \varnothing$;

б) $\psi(p)$ не визначено, якщо $\{\varepsilon \geqslant 0 \mid \alpha(\varepsilon) \leqslant p\} = \varnothing$.

Теорема 1 (про стійкість положення рівноваги нечіткої динамічної системи). *Нехай існують відображення $V: Y \to R^+$, $\nu\colon R^+ \to R^+$ такі, що:*

1) V є додатно визначеною і неперервною функцією на Y;

2) $cL_V(\nu(\varepsilon)) \subseteq B(\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon > 0$;

3) функція $t \mapsto V(y(y_0;t;x))$ не зростає на проміжку (t_1,t_2) для всіх $x \in X_+$, $y_0 \in B(\gamma)$ і t_1, $t_2 \in R^+$, які задовольняють умови $t_1 < t_2$, $\psi(P\{x\})$ визначено і $y(y_0;t;x) \notin cL_V(\nu(\psi(P\{x\})))$ для всіх $t \in (t_1,t_2)$.

Тоді нульове положення рівноваги НДС $y(y_0;t;x)$ стійке з рівнем α.

Доведення. Оберемо довільне число $\varepsilon > 0$. Покладемо $M = \min\{V(y) \mid y \in S(\varepsilon)\} > 0$. Тоді $\varnothing \subset cL_V(M/2) \subseteq B(\varepsilon)$. Оберемо число $\delta_1 > 0$ таке, що $B(\delta_1) \subseteq cL_V(M/2)$, яке існує, оскільки функція V неперервна і додатно визначена, і покладемо $\delta = \min\{\delta_1, \gamma\} > 0$.

Оберемо довільну точку $y_0 \in B(\delta)$ і елемент $\overline{x} \in X_+$ такий, що $P\{\overline{x}\} \geqslant \alpha(\varepsilon)$. Тоді $\psi(P\{\overline{x}\})$ визначено і $\psi(P\{\overline{x}\}) \leqslant \varepsilon$, а функція $t \mapsto y(y_0;t;\overline{x})$ визначена і неперервна на R^+. Позначимо $\upsilon = \nu(\psi(P\{\overline{x}\})) \in R^+$, $A = cL_V(\upsilon) \bigcup cL_V(M/2) \subseteq Y$ і доведемо, що для всіх $t > 0$ виконується включення $y(y_0;t;\overline{x}) \in A$.

Припустимо від супротивного, що існує момент $t_s > 0$ такий, що $y(y_0;t_s;\overline{x}) \notin A$. Оскільки $y_0 \in B(\delta) \subseteq cL_V(M/2) \subseteq A$ і функція $t \mapsto V(y(y_0;t;\overline{x}))$ неперервна, то множини $T_1 = \{t \in \in [0,t_s] \mid y(y_0;t;\overline{x}) \in cL_V(M/2)\}$ і $T_2 = \{t \in [0,t_s] | y(y_0;t;\overline{x}) \in A\}$ непорожні і замкнені. Покладемо $t_1 = \max T_1$, $t_2 = \max T_2$. Враховуючи, що $T_1 \subseteq T_2$, отримуємо нерівність $t_1 \leqslant \leqslant t_2 < t_s$. Тоді $y(y_0;t;\overline{x}) \notin A$ для всіх $t \in (t_2,t_s]$, тому функція $t \mapsto V(y(y_0;t;\overline{x}))$ не зростає на проміжку (t_2,t_s), а оскільки вона неперервна, то вона не зростає і на проміжку $[t_2,t_s]$.

Можливі два випадки:

I. $t_1 < t_2$. У цьому випадку $y(y_0;t_2;\overline{x}) \in A \setminus cL_V(M/2) \subseteq cL_V(\upsilon)$. Оскільки функція $t \mapsto V(y(y_0;t;\overline{x}))$ не зростає на $[t_2,t_s]$, а функція $t \mapsto y(y_0;t;\overline{x})$ неперервна, то $y(y_0;t;\overline{x}) \in \in cL_V(\upsilon) \subseteq A$ при $t \in [t_2,t_s]$, що суперечить припущенню $y(y_0;t_s;\overline{x}) \notin A$.

II. $t_1 = t_2$. У цьому випадку маємо, що $y(y_0;t_2;\overline{x}) \in cL_V(M/2)$. І оскільки функція $t \mapsto V(y(y_0;t;\overline{x}))$ не зростає на $[t_2,t_s]$, а функція $t \mapsto y(y_0;t;\overline{x})$ неперервна, то $y(y_0;t;\overline{x}) \in \in cL_V(M/2) \subseteq A$ при $t \in [t_2,t_s]$, що суперечить припущенню $y(y_0;t_s;\overline{x}) \notin A$.

В обох випадках прийшли до суперечності, тому для всіх $t > 0$ виконується включення $y(y_0; t; \overline{x}) \in A$. Оскільки $cL_V(\upsilon) = cL_V(\nu(\psi(P\{\overline{x}\}))) \subseteq B(\psi(P\{\overline{x}\}))$, $\psi(P\{\overline{x}\}) \leqslant \varepsilon$ і $cL_V(M/2) \subseteq B(\varepsilon)$, то $A = cL_V(\upsilon) \bigcup cL_V(M/2) \subseteq B(\varepsilon)$.

Тобто маємо, що $y(y_0; t; \overline{x}) \in B(\varepsilon)$ для всіх $t > 0$. Отже, внаслідок довільності ε, нульове положення рівноваги стійке з рівнем α за означенням.

Теорему доведено.

Аналогічно доводиться така теорема:

Теорема 2. *Нехай існують відображення $V : Y \to R^+$, $\nu : R^+ \to R^+$ такі, що :*

1) V є додатно визначеною і неперервною функцією на Y;

2) $L_V(\nu(\varepsilon)) \subseteq B(\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon > 0$;

3) функція $t \mapsto V(y(y_0; t; x))$ не зростає на проміжку (t_1, t_2) для всіх $x \in X_+$, $y_0 \in B(\gamma)$ і t_1, $t_2 \in R^+$, які задовольняють умови $t_1 < t_2$, $\psi(P\{x\})$ визначено і $y(y_0; t; x) \notin L_V(\nu(\psi(P\{x\})))$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$.

Тоді нульове положення рівноваги НДС $y(y_0; t; x)$ стійке з рівнем α.

Наслідок 1. *Припустимо, що існують неперервні відображення $V : Y \to R^+$ і $f : R^+ \to \to R^+$ такі, що:*

1) f є монотонно зростаючою функцією, $f(0) = 0$ і $f(\|y\|) \leqslant V(y)$ для всіх $y \in Y$;

2) функція $t \mapsto V(y(y_0; t; x))$ не зростає на проміжку (t_1, t_2) для всіх $x \in X_+$, $y_0 \in \in B(\gamma)$ і t_1, $t_2 \in R^+$, які задовольняють умови $t_1 < t_2$, $\psi(P\{x\})$ визначено і $V(y(y_0; t; x)) > > f(\psi(P\{x\}))$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$.

Тоді нульове положення рівноваги НДС $y(y_0; t; x)$ стійке з рівнем α.

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми 2 для функцій V і $\nu = f$.

Функція V є додатно визначеною на підставі нерівності $f(\|y\|) \leqslant V(y)$, $y \in Y$, тому умова 1 виконується.

Якщо для деяких $\varepsilon \in R^+$ і $y \in Y$ виконується включення $y \in L_V(f(\varepsilon))$, тобто $V(y) \leqslant \leqslant f(\varepsilon)$, то $f(\|y\|) \leqslant f(\varepsilon)$, тому $\|y\| \leqslant \varepsilon$, оскільки f — строго зростаюча функція. Тоді $y \in B(\varepsilon)$. Отже, для всіх $\varepsilon \in R^+$ виконується $L_V(f(\varepsilon)) \subseteq B(\varepsilon)$, тобто виконується умова 2.

Нехай для деяких $x \in X_+$, $y_0 \in B(\gamma)$ і t_1, $t_2 \in R^+$ виконується $t_1 < t_2$, $\psi(P\{x\})$ визначено і $y(y_0; t; x) \notin L_V(\nu(\psi(P\{x\})))$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$. Тоді $V(y(y_0; t; x)) > f(\psi(P\{x\}))$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$, тому функція $t \mapsto V(y(y_0; t; x))$ не зростає на проміжку (t_1, t_2), тобто виконується умова 3.

Таким чином, за теоремою 2 нульове положення рівноваги НДС $y(y_0; t; x)$ стійке з рівнем α.

Наслідок доведено.

Теорема 3 (про встановлення стійкості нульового положення рівноваги нечіткої динамічної системи із використанням нечіткої функції Ляпунова). *Нехай $y : Y \times R^+ \times X \to Y$ — нечітка динамічна система, де $Y = R^n$, $y(0, t, x) \equiv 0$ для всіх t, x і $\alpha : (0, +\infty) \to [0, 1)$ — частково визначена функція. Припустимо, що існують частково визначена функція $V : Y \times \times X \to R^+$, додатно визначена функція $v : Y \to R^+$ і числа $\gamma > 0$ і $\beta \in [0, 1)$ такі, що виконуються умови:*

0) на проміжку $(0, \gamma)$ функція α визначена і набуває значень з $[\beta, 1]$;

1) для кожного $x \in X_\beta$ функція $y \mapsto V(y, x)$ визначена і неперервна на $B(\gamma)$;

2) $V(0, x) = 0$ для всіх $x \in X_\beta$;

3) для кожної пари $(y_0, x) \in B(\gamma) \times X_\beta$ функція $t \mapsto y(y_0; t; x)$ визначена і неперервна на проміжку $[0, +\infty)$, а функція $t \mapsto V(y(y_0; t; x), x)$ монотонно не зростаюча;

4) $\inf\limits_{\delta>0} \sup\{V(y,x) \mid (y,x) \in B(\delta) \times X_{\alpha(\varepsilon)}\} < \inf\{V(y,x) | (y,x) \in S(\varepsilon) \times X_{\alpha(\varepsilon)}\}$.
Тоді нульове положення рівноваги системи y стійке з рівнем α.

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon \in (0,\gamma)$. Покладемо $h = \inf\{V(y,x) \mid (y,x) \in S(\varepsilon) \times X_{\alpha(\varepsilon)}\} > 0$.

Покладемо $O = \bigcup\limits_{x\colon P\{x\} \geqslant \alpha(\varepsilon)} \{y \mid V(y,x) < h\} \subseteq Y$ — відкрита множина.

Для кожного $y \in O$ існує $\overline{x} \in X_{\alpha(\varepsilon)}$ такий, що $V(y,\overline{x}) < h$, тому $y \notin S(\varepsilon)$ за визначенням h. Звідси $O \cap S(\varepsilon) = \varnothing$. Оскільки O містить 0-вектор, то деяка зв'язна компонента U множини O, що містить 0-вектор, включається в $B(\varepsilon)$. Оскільки множина U відкрита і містить 0-вектор, то існує число $\delta_1 > 0$ таке, що $B(\delta_1) \subseteq U$. За умовою 4 існує число $\delta_2 > 0$ таке, що $V(y,x) < h$ для всіх $(y,x) \in B(\delta_2) \times X_{\alpha(\varepsilon)}$.

Покладемо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Оберемо довільні елементи $y_0 \in B(\delta)$ і $x_0 \in X_{\alpha(\varepsilon)}$.

Тоді $V(y_0, x_0) < h$. За умовою 3 з цього випливає, що $V(y(y_0;t;x_0), x_0) \leqslant V(y_0, x_0) < h$ для всіх $t \geqslant 0$. Тоді $y(y_0;t;x_0) \in O$ для всіх $t \geqslant 0$, і оскільки функція $t \mapsto y(y_0;t;x_0)$ неперервна, а $y_0 \in U$, то $y(y_0;t;x_0) \in U \subseteq B(\varepsilon)$ для всіх $t \geqslant 0$.

Отже, нульове положення рівноваги системи y стійке з рівнем α.

Теорему доведено.

Тепер розглянемо стійкість нечітких динамічних систем, що задані рівнянням зі скалярним процесом нечіткого блукання (ПНБ) [8, 9].

$$dy(y_0;t;x) = g(y(y_0;t;x))dt + h(y(y_0;t;x))\, dw(t,x); \tag{1}$$

$$y(y_0;0;x) = y_0. \tag{2}$$

Припустимо, що:

а) g, h — неперервні функції і $g(0) = h(0) = 0$;

б) для всіх $x \in X_+$ і $y_0 \in B(\gamma)$ (де $\gamma > 0$ — деяке число) існує єдина функція — розв'язок $t \mapsto y(y_0;t;x)$ рівнянь (1), (2) у сенсі Каратеодорі, визначена при всіх $t \geqslant 0$ і така, що $y(y_0;t;x) \in B(\gamma)$ при $t \geqslant 0$.

Покладемо, як і раніше, $\psi(p) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid \alpha(\varepsilon) \leqslant p\}$.

Теорема 4 (про стійкість положення рівноваги нечіткої динамічної системи, заданої рівнянням з ПНБ). *Припустимо, що існує диференційоване відображення $V\colon Y \to R^+$ і неперервне відображення $f\colon R^+ \to R^+$ такі, що:*

1) f є монотонно зростаючою функцією, $f(0) = 0$ і $f(\|y\|) \leqslant V(y)$ для всіх $y \in Y$;

2) $\dfrac{dV(y)}{dy} g(y) \leqslant -\sqrt{\varphi^{-1}(p)} \left| \dfrac{dV(y)}{dy} h(y) \right|$ *для всіх $y \in B(\gamma)$ і $p \in (0,1]$ таких, що $\psi(p)$ визначено і $V(y) > f(\psi(p))$.*
Тоді нульове положення рівноваги НДС $y(y_0;t;x)$ стійке з рівнем α.

Доведення. Для доведення твердження використаємо наслідок з теореми 2. Умова 1 наслідку збігається з умовою 1 даного твердження. Перевіримо умову 2 наслідку. Нехай $x \in X_+$, $y_0 \in B(\gamma)$ і $t_1, t_2 \in R^+$ — такі елементи, що $t_1 < t_2$, $\psi(P\{x\})$ визначено і $V(y(y_0;t;x)) > f(\psi(P\{x\}))$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$.

Тоді для всіх $t \in (t_1, t_2)$ виконується нерівність

$$\frac{dV(y(t))}{dy} g(y(t)) \leqslant -\sqrt{\varphi^{-1}(p)} \left| \frac{dV(y(t))}{dy} h(y(t)) \right|,$$

де $y(t) = y(y_0;t;x)$ і $p = P\{x\}$.

Оскільки $|\dot{w}(t,x)| \leqslant \sqrt{\varphi^{-1}(P\{x\})}$ майже скрізь, то для майже всіх $t \in (t_1, t_2)$ виконується:

$$\frac{dV(y(y_0;t;x))}{dt} = \frac{dV(y(t))}{dy} g(y(t)) + \frac{dV(y(t))}{dy} h(y(t)) p(t,x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{dV(y(t))}{dy} g(y(t)) + \sqrt{\varphi^{-1}(p)} \left| \frac{dV(y(t))}{dy} h(y(t)) \right| \leqslant 0.$$

Оскільки функція $t \mapsto y(y_0;t;x)$ абсолютно неперервна, то функція $t \mapsto V(y(y_0;t;x))$ не зростає на проміжку (t_1, t_2).

Таким чином, за наслідком з теореми 2, нульове положення рівноваги НДС $y(y_0;t;x)$ стійке з рівнем α.

Теорему доведено.

Таким чином, у роботі розглянуто питання стійкості нечітких динамічних систем. Введено поняття нечіткої динамічної системи, визначення стійкості з рівнем α. Для побудови умов стійкості використовувались функції Ляпунова. Доведено теореми про стійкість з рівнем α нульового положення рівноваги. Отримані результати застосовано для дослідження стійкості нечітких диференціальних рівнянь, що побудовані за процесом нечіткого блукання.

Роботу виконано за підтримки ДФФД, проект № Ф28.1/033.

1. *Buckley J. J., Feuring Th.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – **110**. – P. 43–54.
2. *Buckley J. J., Qu Y.* Solving fuzzy equations: a new solution concept // Ibid. – 1992. – **50**. – P. 1–14.
3. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Ibid. – 1990. – **35**. – P. 389–396.
4. *Kloeden P. E.* Fuzzy dynamical systems // Ibid. – 1982. – **7**. – 1982. – P. 275–296.
5. *Денисенко В. С., Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об устойчивости по Ляпунову нечетких импульсных систем Такаги–Сугено // Нелинейные колебания. – 2008. – **11**, № 4. – С. 481–494.
6. *Liu B.* Fuzzy process, hybrid process and uncertain process // J. Uncert. Process. – 2008. – **2**, No 1. – P. 13–16.
7. *Бичков О. С.* Побудова інтегралу за процесом нечіткого блукання // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз. і мат. – 2005. – № 4. – С. 19–24.
8. *Бичков О. С., Меркурьев М. Г.* Існування та єдиність розв'язків нечіткого диференціального рівняння // Там само. – 2006. – № 1. – С. 27–34.
9. *Белов Ю. А., Бичков О. С., Меркурьев М. Г.* Про один підхід до моделювання нечіткої динаміки // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 14–19.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 08.07.2010

A. S. Bychkov

On the stability of fuzzy dynamical systems

The question of the stability of the equilibrium of a fuzzy dynamical system is considered. To establish the stability, the ordinary and fuzzy Lyapunov's functions are used. Some theorems on the stability are proved.