УДК 519.6

Академік НАН України **І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, Л. І. Гулік, О. В. Ткаченко, О. О. Черняк**

Математична модель поверхні тіла у неявній формі на основі інтерфлетації функцій

В роботі запропоновано, з використанням інтерфлетації функцій, новий, загальний метод побудови рівнянь поверхонь тіл складної форми в наявній формі $\partial G : O_G(x,y,z) = 0$, де ∂G — поверхня 3D-тіла G. Функція $O_G(x,y,z) \in C^r(R^3)$, $r \geqslant 1$, є найкращим середньоквадратичним наближенням до функції $f(x,y,z) \in C(R^3)$, побудованої за допомогою R-функцій, яка входить в рівняння $f(x,y,z) = 0$, $(x,y,z) \in \partial G$.

Задача побудови математичної моделі поверхні тривимірного тіла виникає при описі поверхонь космічних тіл за даними радіолокації, при описі поверхні дна океану за допомогою даних гідролокації, при описі поверхонь деяких деталей або блоків машин (автомобілів, літаків, підводних човнів тощо), у швейній промисловості і т. д. Незважаючи на значні успіхи при розв'язанні цієї задачі, на практиці побудова якісних поверхонь літаків, автомобілів, підводних човнів, поверхонь лопаток двигунів тощо, які повинні задовольняти ряд технологічних обмежень, ще далека від оптимальної. Одним з найскладніших при побудові таких математичних моделей є задовільнення технологічних обмежень диференціального типу (неперервність похідних заданих порядків). Тому актуальною є задача побудови і дослідження математичних моделей поверхонь у неявній формі, які задовольняють задані технологічні обмеження.

Аналіз літературних джерел, присвячених поставленій задачі. Для опису поверхні тіла використовуються:

явна форма задання поверхні у вигляді $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$ або $y = f(x,z)$, $(x,z) \in \in D_{xz}$, або $x = f(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$;

неявна форма задання поверхні у вигляді $F(x,y,z) = 0$, $(x,y,z) \in D_{xyz}$;

задання поверхні у вигляді точкового каркасу $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = \overline{1,N}$;

параметричне задання поверхні у вигляді $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in \in D_{uv}$.

Найчастіше для розв'язання цієї задачі використовується циліндрична система координат $x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$, $z = z$, $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ (в цих формулах вважається, що на поверхні тіла $r = r(z,\varphi)$), або сферична система координат $x = x(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = y(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = z(r,\varphi,\theta) = r\sin\theta$, $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ (в цих формулах вважається, що на поверхні тіла $r = r(\varphi,\theta)$).

Найбільш розповсюдженими засобами цифрового представлення рельєфу є растрове представлення та особлива модель просторових даних (DEM), яка апроксимує рельєф багатогранною поверхнею з відліками висот (глибин) у вузлах трикутної сітки. Система DEM є загальноприйнятою при описі рельєфу планет на основі даних аерокосмічної зйомки, у геодезії тощо. Її недолік: на кожній грані багатогранної поверхні аналітична форма поверхні визначається площиною, що проходить через три точки грані. Значно точніше цю задачу можна розв'язати за допомогою інтерфлетації функції трьох змінних. При цьому математична модель поверхні зберігає неперервність наближуючої функції і неперервність її частинних похідних до заданого порядку незалежно від вибору достатньої (для потрібної точності наближення) кількості параметрів у формулі інтерфретації.

Серед аналітичних методів опису поверхонь складних тіл, поверхня яких складається з частин відомих поверхонь, відзначимо метод R-функцій В. Л. Рвачова [6]. Цей метод дозволяє за допомогою відомих рівнянь $w_i(x, y, z) = 0$, $i = \overline{1, N}$, частин Γ_k, $k = \overline{1, N}$, поверхні Γ та логічної функції $F(u_1, u_2, \ldots, u_N, \wedge, \vee, \neg)$, що описує область тіла із даною поверхнею Γ за допомогою логічних операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення $\wedge$, $\vee$, $\neg$ та R-функцій $u \wedge_0 v = (u + v - \sqrt{u^2 + v^2})/2$, $u \vee_0 v = (u + v + \sqrt{u^2 + v^2})/2$, $-u$, отримувати рівняння поверхні Γ у вигляді

$$F(w_1, w_2, \ldots, w_N, \wedge_0, \vee_0, -) = 0.$$

Недолік цього методу: отримана таким чином функція

$$F(x, y) = F(w_1, w_2, \ldots, w_N, \wedge_0, \vee_0, -)$$

на ребрах поверхні та у її кутових точках є недиференційовною. Це означає, що використання таких функцій в задачах, де істотною є вимога, щоб наближуюча функція мала неперервні похідні порядків r, $r \geqslant 1$, вимагає додаткових досліджень.

Метою даної роботи є побудова математичної моделі поверхні тривимірного тіла у неявній формі із збереженням потрібного класу диференційовності, основаної на використанні сплайн-інтерфлетації функцій трьох змінних з мінімізацією відхилення шуканої функції від заданої (при тому або іншому критерії оптимізації). Вхідними даними для опису є рівняння частин поверхонь, що належать досліджуваній поверхні.

Допоміжні твердження. Будемо використовувати B-сплайни степеня n, $n \geqslant 2$ дефекту 1 на нерівномірній (взагалі кажучи) сітці вузлів $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$, $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$, $y_0 = y_{n+1} = 0$ [7]; $S_n(x) := S_n(x, X, Y) \in C^{n-1}(R)$, $\operatorname{supp}(S_n(x)) = (X_0, X_{n+1})$ є сплайном n-го степеня з вузлами X_k, $k = \overline{0, n+1}$, та невідомими $y_1, \ldots, y_n$ при умовах $y_0 = y_{n+1} = 0$,

$$S_n^{(n-1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant X_0, \\ g_{n-1,k}(x, y) = y_{k-1}\dfrac{x - X_k}{X_{k-1} - X_k} + y_k\dfrac{x - X_{k-1}}{X_k - X_{k-1}}, \\ \qquad X_{k-1} < x \leqslant X_k, \qquad k = \overline{1, n+1}, \\ 0, & x \geqslant X_{n+1}, \end{cases}$$

$$S_n^{(n-p)}(x) = \int_{X_0}^{x} S_n^{(n-p+1)}(t)\, dt, \qquad p = 2, \ldots, n.$$

Тоді для знаходження невідомих $y_1, \ldots, y_n$ досить розв'язати СЛАР $(n-1)$-го порядку

$$S_n^{(n-p)}(X_{n+1}, y) = 0, \qquad p = 2, \ldots, n, \tag{1}$$

$$\int_{X_0}^{X_{n+1}} S_n(t)\, dt = 1. \tag{2}$$

Умови (1) є необхідними, а (2) можна замінити іншою умовою нормування.

В роботах О. М. Литвина та Л. І. Гулік [4, 5] запропоновано метод точного задовільнення граничних умов (взагалі кажучи, неоднорідних) на границях тривимірних областей складної форми, обмежених частинами відомих поверхонь. Цей метод застосуємо при побудові неявних рівнянь поверхонь складної форми.

Опишемо алгоритм побудови рівняння $O_G(x,y,z)=0$ — границі ∂G тривимірної області $G\subset R^3$, обмеженої частинами відомих поверхонь. Алгоритм зручно розбити на кроки. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $G\subset[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$.

Крок 1. Розіб'ємо область G на підобласті площинами $x=x_i$, $i=\overline{0,m_1}$; $y=y_j$, $j==\overline{0,m_2}$; $z=z_k$, $k=\overline{0,m_3}$, паралельними координатним, $a_1=x_0<x_1<\cdots<x_{m_1}=b_1$; $a_2=y_0<y_1<\cdots<y_{m_2}=b_2$; $a_3=z_0<z_1<\cdots<z_{m_3}=b_3$. Ці підобласті будуть таких типів:

паралелепіпеди $\Pi_{ijk}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]\times[z_k,z_{k+1}]$;

паралелепіпеди $\widetilde{\Pi}_{ijk}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]\times[z_k,z_{k+1}(x,y)]$ з однією криволінійною (взагалі кажучи) гранню, яка є частиною границі ∂G області G. Таких паралелепіпедів для кожної точки $A_{i,j,k}(x_i,y_j,z_k)$, може бути шість, залежно від того, як розміщена криволінійна грань;

піраміди (симплекси) T_{ijk} з однією криволінійною (взагалі кажучи) гранню, яка є частиною границі ∂G області G. Таких пірамід для кожної приграничної точки $A_{i,j,k}$ може бути вісім, залежно від того, як розміщена криволінійна грань. Наприклад,

$$T^{(1)}_{i,j}=\{(x,y)\,|\,x\geqslant x_i,y\geqslant y_i,y\leqslant\eta_{j+1}(x),\eta'_{j+1}(x)<0,x_i<x<x_{i+1};z_k\leqslant z\leqslant z_{k+1}(x,y)\},$$

$$T^{(2)}_{i,j}=\{(x,y)\mid x\geqslant x_i,y\geqslant y_i,y\leqslant\eta_{j+1}(x),\eta'_{j+1}(x)<0,x_i<x<x_{i+1};z_k(x,y)\leqslant z\leqslant z_{k+1}\}\text{ —}$$

циліндрична область C_{ijk}, бічна поверхня якої складається з двох граней, перпендикулярних площин, паралельних відповідним координатним площинам, та однієї криволінійної, взагалі кажучи, грані, яка є частиною границі. Таких циліндрів для кожної приграничної точки $A_{i,j,k}$ може бути вісім і відрізняються вони розміщенням криволінійної грані. Наприклад,

$$\begin{aligned}C^{(1)}_{i,j}&=\{(x,y,z):x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1};y_j\leqslant y\leqslant y_{j+1}(x),y_{j+1}(x_i)=y_j,y_{j+1}(x_{j+1})=y_{j+1};\\&\quad z_k\leqslant z\leqslant z_{k+1}\};\\C^{(2)}_{i,j}&=\{(x,y,z):x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1};y_j(x)\leqslant y\leqslant y_{j+1},y_j(x_i)=y_j,y_j(x_{i+1})=y_{j-1};\\&\quad z_k\leqslant z\leqslant z_{k+1}\}.\end{aligned}$$

Крок 2. Будуємо інтерфлетанти $O\Pi_{ijk}(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Pi_{ijk}$, $O\widetilde{\Pi}_{ijk}(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\in\widetilde{\Pi}_{ijk}$, OT_{ijk}, $(x,y,z)\in T_{ijk}$, $OC_{ijk}(x,y,z)$, $(x,y,z)\in C_{ijk}$, з властивостями

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}O\Pi_{ijk}(x,y,z)=\frac{\partial^p}{\partial t^p}u(x,y,z),\qquad(x,y,z)\in\partial\Pi_{ijk},\qquad t\in\{x,y,z\},$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}O\widetilde{\Pi}_{ijk}(x,y,z)=\frac{\partial^p}{\partial t^p}u(x,y,z),\qquad(x,y,z)\in\partial\widetilde{\Pi}_{ijk},\qquad t\in\{x,y,z\},$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}OT_{ijk}(x,y,z)=\frac{\partial^p}{\partial t^p}u(x,y,z),\qquad(x,y,z)\in\partial T_{ijk},\qquad t\in\{x,y,z\},$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}OC_{ijk}(x,y,z)=\frac{\partial^p}{\partial t^p}u(x,y,z),\qquad(x,y,z)\in\partial C_{ijk},\qquad t\in\{x,y,z\}.$$

Крок 3. Будуємо оператор Ou у вигляді:

$$Ou(x,y,z) = \begin{cases} O\Pi_{ijk}(x,y,z), & (x,y,z) \in \Pi_{ijk}, \\ O\widetilde{\Pi}_{ijk}(x,y,z), & (x,y,z) \in \widetilde{\Pi}_{ijk}, \\ OT_{ijk}(x,y,z), & (x,y,z) \in T_{ijk}, \\ OC_{ijk}(x,y,z), & (x,y,z) \in C_{ijk}. \end{cases}$$

Теорема 1. *Для кожної $u(x,y,z) \in C^r(G)$, $r = 0,1,\ldots,n$, існує оператор $Ou(x,y,z)$ у записаній вище формі, який має властивості*

$$Ou(x,y,z) \in C^r(G)\ \forall\, u(x,y,z) \in C^r(G),$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} Ou(x,y,z) = \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \partial G, \qquad t \in \{x,y,z\},$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} Ou(x,y,z) = \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in GXYZ, \qquad t \in \{x,y,z\},$$

$$GXYZ = \{(x,y,z)\colon x = x_i, i = \overline{0,m_1}; y = y_j, j = \overline{0,m_2}, z = z_k, k = \overline{0,m_3}\}.$$

Таким чином, оператори $Ou(x,y,z)$ та їх немішані похідні до порядку n збігаються з функцією $u(x,y,z)$ та її немішаними похідними до порядку n на площинах $x = x_i$, $i = 0,\ldots,m_1$; $y = y_j$, $j = 0,\ldots,m_2$; $z = z_k$, $k = 0,\ldots,m_3$, та на границі ∂G тривимірної області G. Якщо ми будуємо рівняння поверхні ∂G у вигляді $O_G f(x,y,z) = 0$, то у формулі $O_G f(x,y,z)$ треба покласти рівними нулю сліди функції $O_G f(x,y,z)$ на границі ∂G. В результаті отримаємо формулу $O_G u(x,y,z)$, яка точно задовольняє умову $O_G u(x,y,z) = 0$, $(x,y,z) \in \partial G$, незалежно від вибору слідів

$$u_{ip}(y,z) = \left.\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right|_{x=x_i}, \qquad v_{jq}(x,z) = \left.\frac{\partial^q f}{\partial y^q}\right|_{y=y_j}, \qquad w_{ks}(x,y) = \left.\frac{\partial^s f}{\partial z^s}\right|_{z=z_k},$$

$$\left.\frac{\partial^q u_{ip}(y,z)}{\partial y^q}\right|_{y=y_j} = \left.\frac{\partial^p v_{jq}(x,z)}{\partial x^p}\right|_{x=x_i}, \qquad \left.\frac{\partial^s u_{ip}(y,z)}{\partial z^s}\right|_{z=z_k} = \left.\frac{\partial^p w_{ks}(x,y)}{\partial x^p}\right|_{x=x_i},$$

$$\left.\frac{\partial^s v_{jq}(x,z)}{\partial z^s}\right|_{z=z_k} = \left.\frac{\partial^q w_{ks}(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=y_j}, \qquad \left.\frac{\partial^{q+s} u_{ip}(y,z)}{\partial y^q \partial z^s}\right|_{y=y_j,z=z_k} = \left.\frac{\partial^{p+s} v_{jq}(x,z)}{\partial x^p \partial z^s}\right|_{x=x_i,z=z_k},$$

$$u_{i0}(y,z) = 0, \qquad ((x_i,y,z) \in \partial G); \qquad v_{j0}(x,z) = 0, \qquad ((x,y_j,z) \in \partial G);$$

$$w_{k0}(x,y) = 0, \qquad ((x,y,z_k) \in \partial G),$$

$$\frac{\partial^q u_{ip}(y,z)}{\partial y^q}|_{y=y_j} = \frac{\partial^p v_{jq}(x,z)}{\partial x^p}|_{x=x_i}.$$

Сліди u_{ip}, v_{jq}, w_{ks} є невідомими. Їх вибір в точках, що належать області $G \setminus \partial G$, може бути підпорядкованим деякому критерію. Ми будемо вимагати, щоб цей вибір задовольняв умову

$$\iiint\limits_G (w(x,y,z) - O_G u(x,y,z))^2 dxdydz \longrightarrow \min_{u_{ip},v_{iq},w_{ks}},$$

де $\omega(x, y, z) = 0$ — нормальне рівняння границі області G, або рівняння ∂G, побудоване за допомогою R-функцій.

Таким чином, запропоновано загальний метод побудови неявних рівнянь $O_G(x, y, z) = 0$ поверхонь складної форми з використанням інтерфлетації функцій. Функція $O_G(x, y, z) \in C^r(\overline{G})$, $r \geqslant 1$, є найкращим середньоквадратичним наближенням до функції $f(x, y, z) \in C(\overline{G})$, побудованої за допомогою R-функцій, які входять в рівняння $f(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in \partial G$.

1. *Сергиенко И. В., Литвин О. Н.* Методы вычислений, ориентированные на современные компьютерные технологии // Кибернетика и системн. анализ. – 2007. – № 1. – С. 56–72.
2. *Литвин О. М.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В. Л. Рвачова // Мат. методи та фіз.-мат. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 25–35.
3. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
4. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 333 с.
5. *Гулик Л. И., Литвин О. Н.* Интерфлетация функций трех переменных на пирамиде с одной криволинейной гранью // Кибернетика и системн. анализ. – 2005. – № 6. – С. 32–49.
6. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 555 с.
7. *Литвин О. М., Ткаченко О. В.* Математичне моделювання процесів інтерполяційними сплайнами на нерегулярній сітці вузлів // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 34–38.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ
Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 01.10.2009

Academician of the NAS of Ukraine **I. V. Sergienko, O. M. Lytvyn, L. I. Gulik, O. V. Tkachenko, O. O. Chernyak**

A mathematical model of the surfaces of a body in the implicit form on the basis of the interflatation of functions

A new general method, which uses the interflatation of functions, of construction of the equations of surfaces of bodies with complex shape in the implicit form $O_G(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in \partial G$, where ∂G is the surface of the 3D body G, is offered. The function $O_G(x, y, z) \in C^r(R^3)$, $r \geqslant 1$ is the best mean-square approximation of the function $f(x, y, z) \in C(R^3)$ which is built with the use of R-functions and satisfies the equation $f(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in \partial G$.