

Академік НАН України **Я. М. Григоренко, Л. В. Харитонова**

Дослідження деформативності гнучких пологих циліндричних оболонок при критичних значеннях навантаження

На основі точного аналітичного розв'язку нелінійної крайової задачі досліджено напружено-деформований стан і втрату стійкості гнучкої нескінченно довгої пологої некругової циліндричної оболонки під дією нерівномірного нормального поверхневого навантаження в докритичній і закритичній областях деформування для жорсткого закріплення поздовжніх країв. Отримано аналітичні умови, що визначають потенційну здатність оболонки до втрати стійкості за рахунок біфуркації та за рахунок хлопка.

Дослідження середнього згину оболонок та визначення умов втрати стійкості вимагає розв'язання задач деформування оболонок в геометрично нелінійній постановці [1, 2]. При цьому особлива увага приділяється визначенню критичних значень навантаження, при яких відбувається втрата оболонкою стійкості. Поряд з деякими наближеними підходами до розв'язання даного класу задач [3], важливим є отримання точних аналітичних розв'язків [4–5], що дозволяє провести аналіз напружено-деформованого стану оболонки в докритичній і закритичній областях деформування.

Розглянемо задачу про деформування гнучкої нескінченно довгої пологої циліндричної оболонки сталого товщини, некругового поперечного перерізу під дією нерівномірного нормального поверхневого навантаження. Середина поверхня оболонки віднесена до ортогональної системи координат XOY (Ox напрямлена вздовж осі оболонки, Oy — вздовж її напрямної ($-\infty < x < \infty$, $-b \leq y \leq b$)).

Приймаємо, що кривизна і навантаження змінюються вздовж напрямної за квадратичними законами (k_0 — кривизна кола):

$$k_y(y) = k_0(1 + \gamma_0 y^2), \quad q(y) = q_0(1 + \delta_0 y^2), \quad k_0 = \text{const}, \quad q_0 = \text{const}.$$

Вихідні рівняння запишемо у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь в безрозмірних величинах [6]

$$\frac{dv^*}{d\eta} - \varphi(\eta)w^* + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^*}{d\eta} \right)^2 = -\frac{4}{3} \frac{\mu^2}{(k^*)^2}, \quad (1)$$

$$\frac{d^4 w^*}{d\eta^4} + \mu^2 \frac{d^2 w^*}{d\eta^2} = -\mu^2 \varphi(\eta) + q^* \psi(\eta), \quad \varphi(\eta) = 1 + \gamma \eta^2, \quad \psi(\eta) = 1 + \delta \eta^2. \quad (2)$$

В (1), (2) введено такі безрозмірні величини:

$$\eta = \frac{y}{b} \quad (-1 \leq \eta \leq 1), \quad w^* = \frac{w}{k_0 b^2}, \quad v^* = \frac{v}{k_0^2 b^3}, \quad \mu = b\lambda, \quad (3)$$

$$q^* = \frac{b^2}{k_0 D_M} q_0, \quad k^* = \frac{4k_0 b^2}{h} = \frac{4b^2}{r_0 h}, \quad \gamma = \gamma_0 b^2, \quad \delta = \delta_0 b^2,$$

де v , w — тангенціальне і нормальне переміщення; $\lambda^2 = -N_y/D_M$, N_y — зусилля за прямою, $N_y < 0$ (стиск); D_N , D_M — тангенціальна та згинна жорсткості; h — товщина оболонки ($h = \text{const}$).

Поздовжні края оболонки жорстко закріплені. Тоді граничні умови на цих краях у безрозмірних величинах запишемо у вигляді

$$w^*(\pm 1) = 0, \quad \left. \frac{dw^*}{d\eta} \right|_{\eta=\pm 1} = 0, \quad v^*(\pm 1) = 0. \quad (4)$$

Останню з умов (4) на одному краї можна замінити еквівалентною умовою

$$\Delta^* = \int_{-1}^1 \frac{dv^*}{d\eta} d\eta = 0, \quad (5)$$

яка означає, що зближення між краями відсутнє.

Рівняння (2) за виглядом є лінійним диференціальним рівнянням з постійним коефіцієнтом $\mu^2 = b^2\lambda^2 = -N_y b^2/D_M$. Проте, залежність безрозмірного прогину w^* від параметра навантаження q^* є нелінійною, оскільки внутрішнє зусилля N_y є нелінійною функцією навантаження q .

Загальний розв'язок рівняння (2) отримуємо у вигляді

$$w^* = C_1 \cos \mu\eta + C_2 \sin \mu\eta + C_3\eta + C_4 + w^{*(k)} + w^{*(q)}, \quad (6)$$

де

$$w^{*(k)} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\gamma}{\mu^2} \right) \eta^2 - \frac{\gamma}{12} \eta^4, \quad w^{*(q)} = \frac{q^*}{2\mu^2} \left(1 - \frac{2\delta}{\mu^2} \right) \eta^2 + \frac{\delta q^*}{12\mu^2} \eta^4. \quad (7)$$

Сталі інтегрування знаходяться з умов (4) відносно прогину w^* , які приводять до системи чотирьох лінійних рівнянь, що розпадається на дві системи відносно C_1 , C_4 та C_2 , C_3 . Нетривіальні розв'язки системи відносно C_2 , C_3 можливі при умові $\text{tg } \mu = \mu$, звідки $\mu \approx 4,493; 7,725, \dots$ При цьому ($C_2 \neq 0$, $\text{tg } \mu = \mu$), коли параметр внутрішнього зусилля досягає значення $\tilde{\mu} \approx 4,493$, симетрична відносно центральної осі форма рівноваги оболонки вперше стає нестійкою і з'являється несиметрична складова прогину.

Проведемо дослідження симетричних форм рівноваги, тобто розглянемо такі оболонки, при деформуванні яких внутрішнє зусилля $\mu = \tilde{\mu}$ не досягається. Тоді $\text{tg } \mu \neq \mu$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ і розв'язок (6) набуває вигляду

$$w^* = \left(\alpha + \frac{\beta}{3} \right) \frac{\cos \mu\eta - \cos \mu}{\mu \sin \mu} + \frac{\alpha}{2} (\eta^2 - 1) + \frac{\beta}{12} (\eta^4 - 1), \quad (8)$$

де

$$\alpha = \left(1 - \frac{2\delta}{\mu^2} \right) \frac{q^*}{\mu^2} - \left(1 - \frac{2\gamma}{\mu^2} \right), \quad \beta = \frac{\delta q^*}{\mu^2} - \gamma. \quad (9)$$

Враховуючи вираз (8) в рівнянні (1) і задовольняючи граничну умову (5), одержуємо залежність між q^* і μ у вигляді квадратного рівняння

$$\frac{a}{\mu^4} (q^*)^2 + \frac{b}{\mu^2} q^* + c = 0, \quad (10)$$

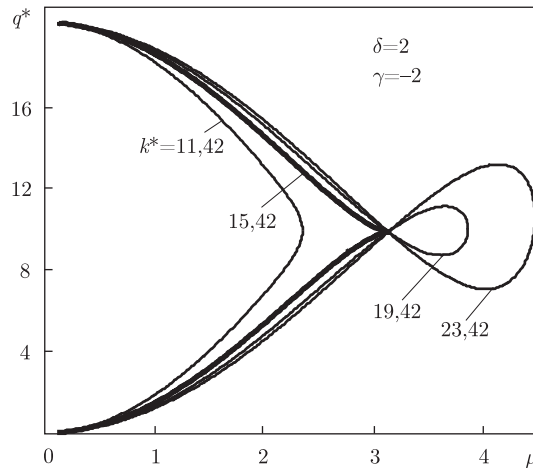


Рис. 1. Залежність параметра внутрішнього зусилля від навантаження

де

$$\begin{aligned}
 a &= N_1 \sin^2 \mu + \frac{N_2}{\mu} \sin \mu \cos \mu - \frac{A^2}{2} \cos^2 \mu, \\
 b &= N_3 \sin^2 \mu + \frac{N_4}{\mu} \sin \mu \cos \mu + AB \cos^2 \mu, \\
 c &= N_5 \sin^2 \mu + \frac{8}{3} \left(\frac{\mu}{k^*} \right)^2 \sin^2 \mu + \frac{N_6}{\mu} \sin \mu \cos \mu - \frac{B^2}{2} \cos^2 \mu, \\
 N_i &= N_i(\mu, \delta, \gamma), \quad i = 1, \dots, 6; \quad A = A(\mu, \delta), \quad B = B(\mu, \gamma).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Отже, точний аналітичний розв'язок крайової задачі (1), (2), (4), (5) одержано у вигляді залежностей (8), (10). Залежність $w^*(q^*)$ при фіксованому значенні координати η отримується шляхом виключення μ з виразу для w^* (8) за допомогою (10). Графіки функцій $\mu(q^*)$ та $w^*(q^*)$, побудовані за допомогою виразів (8), (10) при $\eta = 0$ і $\delta = -2$; $\gamma = -2$ для різних значень k^* , наведено на рис. 1, 2.

Дискримінант квадратного рівняння (10) має вигляд:

$$D = D^* \frac{\sin^2 \mu}{\mu^4}, \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned}
 D^* &= \left[N_3^2 - 4N_1N_5 + \frac{32}{3} \left(\frac{\mu}{k^*} \right)^2 N_1 \right] \sin^2 \mu + \\
 &+ \left[N_3N_4 - 2N_2N_5 - 2N_1N_6 + \frac{16}{3} \left(\frac{\mu}{k^*} \right)^2 N_2 \right] \frac{2}{\mu} \sin \mu \cos \mu + \\
 &+ \left[\frac{N_4^2}{\mu^2} - \frac{4N_2N_6}{\mu^2} + 2ABN_3 + 2A^2N_5 + 2B^2N_1 - \frac{16}{3} \left(\frac{\mu}{k^*} \right)^2 A^2 \right] \cos^2 \mu.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Досліджуючи (13), встановлюємо, що для заданої геометрії оболонки існує певне граничне значення параметра внутрішнього зусилля μ_{\max} , для якого $D^*(\mu) > 0$ при $0 < \mu < \mu_{\max}$,

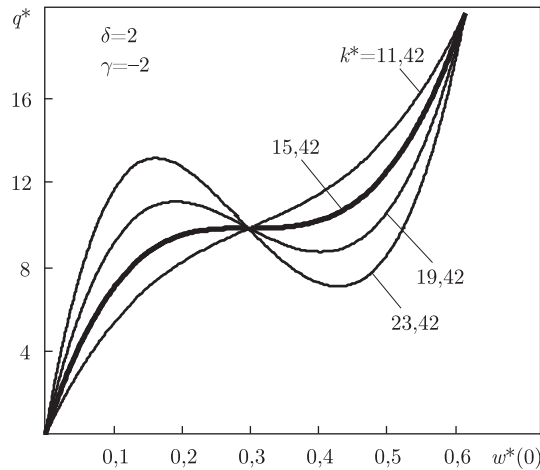


Рис. 2. Залежність прогину в вершині оболонки від навантаження

$D^* = 0$ при $\mu = \mu_{\max}$, $D^*(\mu) < 0$ при $\mu > \mu_{\max}$. Таким чином, при аналізі розв'язку задачі доцільно розглянути такі випадки:

1) $0 < \mu_{\max} < \pi$, 2) $\pi \leq \mu_{\max} < \tilde{\mu}$, 3) $\mu_{\max} \geq \tilde{\mu}$, реалізація яких визначається значенням узагальненого геометричного параметра k^* . Значення цього параметра, яке розділяє перші два випадки, позначимо \tilde{k}^* , а другий і третій випадки — \tilde{k} ;

1) $0 < \mu_{\max} < \pi$ ($0 < k^* < \tilde{k}^*$, $\tilde{k}^* = 11,4$ для $\delta = \gamma = 0$). В цьому випадку значення $\mu = \pi$ не досягається, залежності $w^*(q^*)$ є монотонними і існує тільки одна стійка симетрична форма рівноваги оболонки, втрати стійкості (явища хлопка) не відбувається;

2) $\pi \leq \mu_{\max} < \tilde{\mu}$ ($\tilde{k}^* \leq k^* < \tilde{k}$). В цьому випадку залежності $w^*(q^*)$ мають точки максимуму і мінімуму (верхнє і нижнє критичні значення навантаження) і існують дві різні форми стійкої рівноваги оболонки, перехід між якими відбувається за рахунок хлопка (рис. 2). При навантаженні оболонки перехід від однієї форми рівноваги до іншої здійснюється в точці максимуму залежності $w^*(q^*)$, а при розвантаженні — в точці мінімуму цієї залежності. При $k^* = \tilde{k}^*$ жирна крива $w^*(q^*)$ розділяє зазначені випадки. На рис. 1, 2 значенню \tilde{k}^* ($k^* = 15,42$) відповідають жирні криві;

3) $\mu_{\max} \geq \tilde{\mu}$ ($k^* \geq \tilde{k}$, $\tilde{k} = 20,09$ для $\delta = \gamma = 0$). В цьому діапазоні досягається значення параметра внутрішнього зусилля $\mu = \tilde{\mu}$ і відбувається втрата стійкості з виникненням несиметричної форми рівноваги.

Вираз для отримання значення узагальненого геометричного параметра \tilde{k}^* знаходиться з умови $D^*|_{\mu=\pi} = 0$ і має вигляд:

$$\tilde{k}^* = \frac{4\pi^2 A}{[6\pi^2(A^2 N_5 + B^2 N_1 + AB N_3) + 3(N_4^2 - 4N_2 N_6)]^{1/2}}. \quad (14)$$

За формулою (14) при різних значеннях γ і δ можна визначити величину \tilde{k}^* , а потім за формулою (8) з врахуванням залежності (10) побудувати графіки функції $w^*(q^*)$ при фіксованому η для різних \tilde{k}^* .

Аналогічним чином можна отримати аналітичний вираз для значень параметра \tilde{k} , таких що в діапазоні $k^* \geq \tilde{k}$ можлива втрата стійкості оболонки за рахунок біфуркації з пе-

реходом до несиметричної форми рівноваги. Для цього прирівнюємо вираз для D^* (13) до нуля при $\mu_{\max} = \tilde{\mu} \approx 4,493$. Будемо мати:

$$\tilde{k}^* = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\tilde{\mu}(A^2 - 2N_1\tilde{\mu}^2 - 2N_2)^{1/2}}{[\tilde{\mu}^2(N_3^2 - 4N_1N_5) + 2R + \tilde{\mu}^{-2}(N_4^2 - 4N_2N_6)]^{1/2}},$$

де

$$R = N_3N_4 - 2N_2N_5 - 2N_1N_6 + A^2N_5 + B^2N_1 + ABN_3.$$

Для кругової оболонки при рівномірному навантаженні це значення дорівнює $\tilde{k}^* = 20,095$, що узгоджується з результатами роботи [5].

Відзначимо, що при значеннях k^* , що неістотно перебільшують \tilde{k}^* , на практиці реалізується втрата стійкості за рахунок хлопка, оскільки точка біфуркації (виникнення несиметричної форми рівноваги) розташовується в області нестійкого деформування. Позначимо відповідний діапазон $\tilde{k}^* \leq k^* \leq \tilde{K}^*$. При $k^* = \tilde{K}^*$ значення безрозмірного зусилля $\mu = \tilde{\mu}$ відповідає точці максимуму залежності $q^*(\mu)$ і, отже, досягається верхнє критичне значення навантаження. Для кругової оболонки це значення досягається при $\tilde{K}^* = 22,93$ і дорівнює $q_{\max}^* = 16$. При $k^* > \tilde{K}^*$ значення $\mu = \tilde{\mu}$ відповідає точкам, розташованим на докритичній монотонно зростаючій частині кривої $w^*(q^*)$. Отже, при $k^* > \tilde{K}^*$ визначальною є втрата стійкості оболонки за рахунок біфуркації з переходом до несиметричної форми рівноваги.

Таким чином, для суттєво пологих оболонок $0 < k^* < \tilde{k}^*$ втрати стійкості не відбувається. В діапазоні $\tilde{k}^* < k^* < \tilde{K}^*$ визначальною є втрата стійкості за рахунок хлопка, а при $k^* > \tilde{K}^*$ визначальною є втрата стійкості оболонки за рахунок біфуркації з переходом до несиметричної форми рівноваги.

З розв'язку (6) можна отримати і опис несиметричної форми рівноваги, аналогічно тому, як це було зроблено в роботі [7] для кругової оболонки при рівномірному навантаженні. Несиметрична форма рівноваги відповідає нетривіальним розв'язкам системи лінійних рівнянь відносно C_2, C_3 , які можливі за умови $\text{tg } \mu = \mu$, отже при $\mu = 4,493; 7,725; \dots$. Для кожного з цих значень розподіл прогину буде однаковим і його можна визначити з (6). Нетривіальні розв'язки задовольняють умову $C_3 = -C_2\mu \cos \mu$ і вираз (6) після задоволення перших двох граничних умов (4) набуває вигляду

$$w^* = w_S^* - C_2(\eta\mu \cos \mu - \sin \mu\eta),$$

де w_S^* визначається виразом (8). Єдина невідома довільна стала визначається з граничної умови (5), яка при аналізі симетричної форми використовувалася для визначення параметра зусилля μ . Для несиметричної форми ця умова може бути використана, оскільки в цьому випадку μ визначається з умови $\text{tg } \mu = \mu$.

Таким чином, наявність точних аналітичних розв'язків нелінійної крайової задачі дозволяє досліджувати поведінку і втрату стійкості гнучкої довгої пологої некругової циліндричної оболонки в докритичній і закритичній областях деформування залежно від зміни узагальненого геометричного параметра.

1. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
2. Григоренко Я. М., Гуляев В. И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 3–23.
3. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.
4. Григоренко Я. М. До розв'язання задачі про деформацію гнучкої довгої циліндричної оболонки зі змінними параметрами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1977. – № 5. – С. 417–421.
5. Корнишин М. С., Исанбаева Ф. С. Гибкие пластины и панели. – Москва: Наука, 1968. – 260 с.
6. Григоренко Я. М., Харитонова Л. В. К определению критических точек при деформировании гибких некруговых цилиндрических оболочек для жестко закрепленных краев // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 11. – С. 78–87.
7. Керр А., Сойфер М. Линеаризация докритического состояния и ее влияние на определяемые критические нагрузки // Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. Сер. Прикл. механика. – 1969. – № 4. – С. 125–133.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка*

Надійшло до редакції 25.06.2010

Academician of the NAS of Ukraine **Ya. M. Grigorenko, L. V. Kharitonova**

Investigation of deformability of flexible shallow cylindrical shells under critical loading

The stress-strain state and the stability of long flexible shallow noncircular cylindrical shell under a nonuniform normal loading and the boundary condition of a rigid fixing of longitudinal edges are investigated. An exact analytical solution of the corresponding nonlinear boundary-value problem is obtained. Using the given solution, it is possible to analyze the behavior of a shell in prebuckling and postbuckling ranges of deformation. The analytical conditions that define the potential ability to the loss of stability of a shell by buckling and bifurcation are derived.