УДК 539.3

М. П. Семенюк, Н. Б. Жукова, Н. І. Іванова

Про варіант застосування методу Годунова до розв'язання задач стійкості оболонок обертання

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Розроблено варіант розрахунку критичних навантажень та форм втрати стійкості оболонок обертання з застосуванням методу Годунова. При цьому використовується ідея методу продовження за параметром при рівноправності всіх невідомих, в тому числі параметра навантаження. Наведено приклади розрахунків складених оболонок, утворених обертанням спряжених колових дуг при зовнішньому тиску.

Чисельний метод, запропонований С. К. Годуновим [1], знайшов широке застосування при розв'язанні крайових задач статики та динаміки теорії оболонок завдяки роботам акад. НАН України Я. М. Григоренка та його учнів [2]. Цей метод покладено в основу алгоритмів визначення критичних навантажень при дослідженні стійкості оболонок, виготовлених як з традиційних ізотропних матеріалів, так і з анізотропних композиційних [3, 4]. Завершальним етапом більшості з цих алгоритмів є визначення найменшого власного числа матриці однорідних алгебраїчних рівнянь. Після цього, при необхідності, знаходиться розв'язок задачі, що дозволяє отримати уявлення про форму втрати стійкості оболонки. При розв'язанні системи алгебраїчниих однорідних рівнянь одна из констант вважається відомою, а всі інші знаходяться з точністю до прийнятого довільного значення. Такий підхід має недолік, спричинений тим, що апріорі невідомо, яку з констант вважати заданою. Від цього вибору залежить зумовленість матриці і, як наслідок, точність розв'язку.

Нижче пропонується варіант застосування методу [1] для визначення критичних навантажень та форм втрати стійкості, що не має вказаного недоліку. В його основу покладено ідею методу продовження за параметром при рівноправності всіх невідомих, в тому числі параметра навантаження [5], що призводить до розв'язання однорідної задачі як частинного випадку неоднорідної.

1. Постановка задачі. Для розробки розрахункової методики скористаємося варіантом співвідношень нелінійної теорії шаруватих анізотропних оболонок, наведеним в роботі [6]. Розв'язувальну систему диференціальних рівнянь виведено з [6] при умові стаціонарності змішаного функціонала. Ця система має вигляд

$$\varepsilon_{11}(u) - A_{11}T_{11} - A_{12}T_{12} - A_{13}M_{11} + d_{11}\varepsilon_{22} + d_{12}k_{22} + d_{13}k_{12} = 0,$$

$$\varepsilon_{12}(u) - A_{12}T_{11} - A_{22}T_{12} - A_{23}M_{11} + d_{21}\varepsilon_{22} + d_{22}k_{22} + d_{23}k_{12} = 0,$$

$$k_{11}(u) - A_{13}T_{11} - A_{23}T_{12} - A_{33}M_{11} + d_{31}\varepsilon_{22} + d_{32}k_{22} + d_{33}k_{12} = 0,$$

$$\theta_1(u) + \theta = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{21}^*}{\partial \varphi}+a_1(T_{12}^*+T_{21}^*)+a_2(T_{11}-T_{22})-\frac{1}{R_1}T_{13}^*+q_1=0,\\
&\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{12}^*}{\partial x}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi}+a_2(T_{12}^*+T_{21}^*)-a_1(T_{11}-T_{22})-\frac{1}{R_2}T_{23}^*+q_1=0,\\
&\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{13}^*}{\partial x}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{23}^*}{\partial \varphi}+a_2T_{13}^*+a_1T_{23}^*+\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{23}}{R_2}+q_3=0,\\
&\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial x}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi}+2a_1M_{12}+a_2(M_{11}-M_{22})-T_{13}=0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Коефіцієнти A_{ij} та d_{ij} цієї системи можуть бути виражені через жорсткісні параметри співвідношень узагальненого закону Гука [3, 7]. Проекції зусиль T_{ij}^* на напрямки осей до деформації мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&T_{12}^*=T_{12}+T_{11}\omega_1-\frac{2}{R_2}M_{12}, \qquad T_{21}^*=T_{12}+T_{22}\omega_2, \qquad T_{13}^*=T_{13}+T_{11}\theta_1+T_{12}\theta_2,\\
&T_{23}^*=\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi}-a_1(M_{11}-M_{22})+2a_2M_{12}+T_{12}\theta_1+T_{22}\theta_2.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Розв'язувальна система диференціальних рівнянь (1) в частинних похідних після розділення змінних може бути подана як нормальна система звичайних диференціальних рівнянь.

Граничні умови, які також випливають з варіаційного принципу [6], формулюються відносно чотирьох альтернативних функцій з таких пар:

$$
(T_{11},w), \qquad (T_{12}^*,v), \qquad (T_{13}^*,w), \qquad (M_{11},\theta). \tag{3}
$$

2. Розрахунок критичних навантажень та форм втрати стійкості. Вважаємо, що на оболонку діє рівномірний осесиметричний тиск q_3. Докритичний стан оболонки обертання при незалежних від колової координати φ жорсткостях та граничних умовах буде також осесиметричним. Нелінійні рівняння (1) зберігають свій вигляд, але частинні похідні за координатою x стають звичайними, а похідні за координатою φ необхідно покласти рівними нулю. Розв'язок осесиметричної крайової задачі після її лінеаризації знаходиться чисельним методом дискретної ортогоналізації [1]. Зокрема, використання цього методу не обмежується навантаженнями, що менші, ніж граничні критичні значення. Показано [8, 9], що при русі по траєкторії навантаження в рамках інкрементальної процедури проходження регулярних та граничних точок виконується за єдиним алгоритмом. Якщо взяти до уваги цю обставину, то виявляється, що при розрахунку критичних навантажень, які відповідають явищу біфуркації, немає необхідності в застосування критерію Ейлера про існування суміжних форм рівноваги при одному і тому ж самому навантаженні. Замість розв'язку однорідної крайової задачі, яка є наслідком використання критерію Ейлера, для визначення навантажень біфуркації будемо знаходити розв'язок неоднорідної крайової задачі з невідомим параметром навантаження.

Чи є стан оболонки стійким після досягнення навантаженням значення q_0, можна перевірити, якщо прикласти мале неосесиметричне збурення $\delta q\cos n\varphi$. Амплітуда δq вважається невідомою, але досить малою для того, аби реакція оболонки на це навантаження була лінійною. Розв'язувальні функції у збуреному стані дорівнюватимуть сумі їх значень у вихідному стані $(T_{1,c},\theta_{1,c},\ldots)$ та малих приростів у близькому неосесиметричному стані, але нових позначень для них вводити не будемо.

Оскільки оболонка замкнена по коловій координаті, то зусилля, моменти та переміщення будуть періодичними функціями координати φ. У варіанті, що розглядається, розв'язок може бути поданий у вигляді рядів Фур'є

$$\begin{aligned}
&(T_{11}, T_{13}^{*}, M_{11}, u, w, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{11,n}, T_{13,n}, M_{11,n}, u_n, w_n, \theta_n) \cos n\varphi, \\
&(T_{12}^{*}, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{12,n}, v_n) \sin n\varphi.
\end{aligned} \tag{4}$$

Після підстановки розкладу (4) в лінеаризовані рівняння (1) та інтегрування у відповідності з методом Бубнова–Гальоркіна отримаємо систему з восьми звичайних диференціальних рівнянь у нормальному вигляді

$$\frac{dy_i}{d\alpha_1} = F_i(y_{i,c}, y_i), \tag{5}$$

де

$$\begin{aligned}
&y_1 = T_{11,n}, \qquad y_2 = T_{12,n}^{*}, \qquad y_3 = T_{13,n}^{*}, \qquad y_4 = M_{11}, \\
&y_5 = u, \qquad y_6 = v, \qquad y_7 = w, \qquad y_8 = \theta.
\end{aligned} \tag{6}$$

Якщо ввести вектор Y, компонентами якого є функції y_i, і матриці B_1 та B_2 розміром 4×8, то граничні умови можна сформулювати у вигляді $B_1 Y = b_1$, $B_2 Y = b_2$ відповідно при $x = 0$ і $x = L$.

Для розв'язання системи рівнянь (5) при відповідних граничних умовах також скористаємось методом дискретної ортогоналізації [1, 2, 8].

Весь інтервал інтегрування $\alpha_{1,0} \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_{1,l}$ ділиться на k відрізків. На j-му відрізку повний розв'язок записується у вигляді:

$$Y^{(j)} = \overline{Y}^{(j)} C^{(j)}, \tag{7}$$

де $\overline{Y}^{(j)}$ — матриця, яка складається з чотирьох векторів-розв'язків однорідної системи та одного — неоднорідної.

Розв'язок задовольняє граничні умови при $x = 0$ незалежно від значення констант $C^{(j)}$. Для визначення цих констант скористаємось граничними умовами при $x = L$. Підставивши (7) в граничні умови при $x = L$, отримаємо

$$B_2 \overline{Y}^{(k)} C^{(k)} = 0. \tag{8}$$

Видозмінимо процедуру знаходження розв'язку [1, 2], враховуючи те, що компоненти останнього стовпця матриці, яка є розв'язком неоднорідної задачі, пропорційні значенню збурюючого навантаження δq (або δP). Вважатимемо величину δq заданою з деяким коефіцієнтом c_5^j. Тоді вектор $C^{(j)}$ буде визначатися п'ятьма компонентами [1, 6, 9]

$$C^{(j)} = (c_1^j, c_2^j, c_3^j, c_4^j, c_5^j). \tag{9}$$

Система рівнянь

$$B_2 \overline{y}^j C^{(j)} = 0 \tag{10}$$

складається з чотирьох рівнянь відносно п'яти невідомих. Додаткове рівняння приймемо в такому ж вигляді, як і при кроковому навантаженні вздовж кривої множини розв'язків системи [8, 9]. Вказане рівняння відображає той факт, що вектор $C^{(j)}$ на біфуркаційній траєкторії — одиничний:

$$(c^j, c^j) = 1. \tag{11}$$

Розв'язок системи (10) при умові (11) має вигляд

$$c_i^j = \frac{\pm\Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta^2}}, \qquad c_5^j = \frac{\pm\Delta}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta^2}}, \tag{12}$$

де Δ_i — визначники 4-го порядку, які утворюються з основного визначника Δ шляхом заміни його i-го стовпця стовпцем коефіцієнтів при невідомому c_5^j з оберненим знаком. Якщо ранг розширеної матриці B_2 дорівнює 4, то розв'язок у вигляді (12) існує незалежно від того, чи дорівнює визначник Δ нулю, чи ні. При критичному навантаженні визначник $\Delta = 0$, тому

$$c_i^j = \frac{\Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta^2}}, \qquad c_5^j = 0. \tag{13}$$

Звідси випливає, що c_i^j не залежать від значення δq, а система рівнянь (10) буде однорідною.

Якщо навантаження q_0 дорівнює критичному, то амплітуда збурення δq дорівнює нулю. Підтверджується справедливість критерію Ейлера з одного боку, а з другого — що використання вказаного підходу не протирічить традиційній постановці задачі стійкості. Перевага використання запропонованого варіанта розрахунку полягає в тому, що стає простішим розрахунок форми випинання. Однак виникає питання про його застосовність у випадку збігу декількох власних значень, що відповідає виродженню матриці, з рівності нулю визначника якої знаходиться критичне навантаження, більше, ніж на одиницю. В задачі розглядуваного типу виникнення вказаної проблеми практично не можливе. Справа в тому, що система диференціальних рівнянь розпадається при використанні рядів (4) на незалежні для кожного значення n. Мінімальні власні значення деяких з цих систем можуть збігатися, але форми випинання будуть різними внаслідок вказаної незалежності. При визначенні закритичної поведінки оболонок, що розглядаються, необхідно враховувати кратність власних значень.

3. Приклади розрахунку. Розглядається стійкість при зовнішньому тиску оболонок, серединна поверхня яких утворюється при обертанні навколо осі x спряжених дужок кола (рис. 1), яке задано в площині y, x рівнянням

$$y = y_{0,i} + R_{1,i}\sqrt{1 - \frac{(x - x_{0,i})^2}{R_{1,i}^2}}, \tag{14}$$

де $x_{0,i}$, $y_{0,i}$ — координати центра i-го кола. Геометрію дужок визначатимемо за допомогою довжини радіуса R_1 і хорди l_i (рис. 1). Стрілу підйому h_i знайдемо за формулою

$$\frac{1}{R_{1,i}} = \frac{8h_i}{l_i^2 + 4h_i^2}. \tag{15}$$

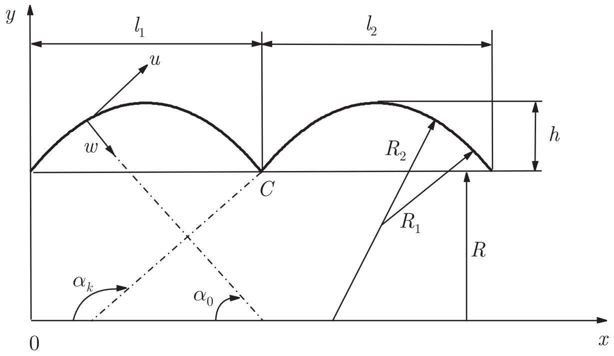

Рис. 1

Знак кривизни визначає знак стріли підйому h_i. Координати центрів кіл знаходяться за допомогою величин l_i та h_i:

$$x_{0,i} = \frac{l_i}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} l_k, \qquad y_{0,i} = h_i + R - R_{1,i}, \tag{16}$$

де R — радіус циліндричної поверхні, що утворюється при обертанні навколо осі x хорди i-ї дужки. Система ортогональних координат на поверхні збігається з сіткою меридіанів и паралелей. Параметри Ламе і нормальні кривини поверхні можна визначити за формулами

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{(x - x_{0,i})^2}{R_{1,i}^2}}}, \qquad A_2 = y, \tag{17}$$

$$k_{1,i} = \frac{1}{R_{1,i}}, \qquad k_{2,i} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{A_1 A_2}, \tag{18}$$

де R_1 і R_2 — радіуси кривизни координатних ліній.

Вважаємо, що оболонка виготовлена з одного шару композита, який має такі механічні характеристики:

$$\mathrm{E}_1 = 0{,}5092 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mathrm{E}_2 = 0{,}1303 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mathrm{G}_{12} = 0{,}5552 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \nu = 0{,}3621.$$

Незмінними геометричними параметрами оболонки при проведенні розрахунків будуть довжина L, радіус R_1, товщина t, причому $L/R = 1{,}8$, $t/R = 0{,}01$ та $t = 0{,}01$ м. Будемо змінювати кількість дужок, що спираються на відрізок довжиною L. На рис. 2 показані форми меридіана (штрихпунктирні криві) у випадку однієї, двох і трьох дужок кола однакового радіуса $R_1 = 1$ м. Через те, що $l_i = L$, $L/2$, $L/3$, згідно з формулою (15) буде змінюватися висота h, відповідно $h = 0{,}564$ м, $h = 0{,}107$ м, $h = 0{,}046$ м. На торцях оболонок приймемо умови жорсткого закріплення. Для сферичного пояса, що утворюється при обертанні однієї дужки кола, критичне значення інтенсивності зовнішнього тиску $q_c = 2{,}12$ Мпа, двох дужок — $q_c = 1{,}39$ Мпа, трьох дужок — $q_c = 1{,}29$ Мпа. Кількість хвиль у напрямку поперечного перерізу оболонок дорівнюватиме 8, 19, 19. Відзначимо, що обчислене за формулою, справедливою для повних сферичних оболонок, значення критичного тиску $q_c = 2{,}09$ Мпа.

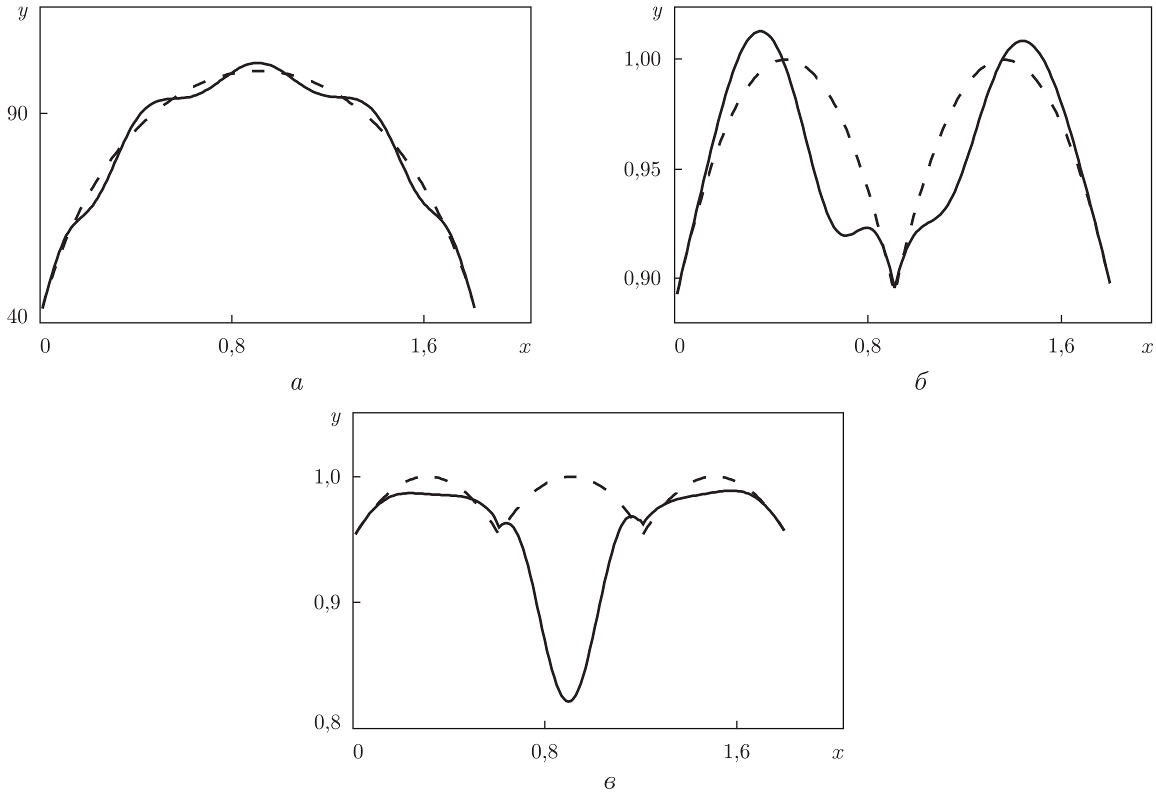

Рис. 2

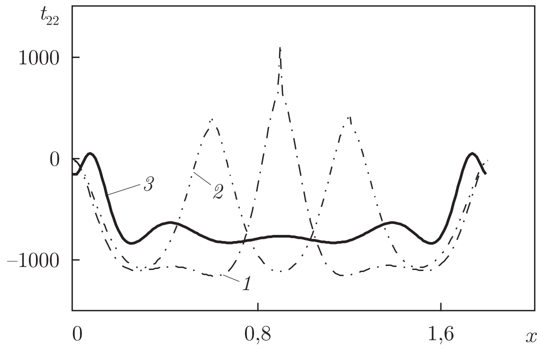

Рис. 3

Суцільні криві на рис. 2 — це форми, яких набуває меридіан при біфуркації. У випадку однієї дужки форма має вигляд хвилястої кривої, симетричної відносно середини з затуханням амплітуд у напрямку торців. При двох і трьох дужках маємо також симетричні криві, але їх вигляд істотно залежить від наявності кутових точок на графіках функцій, що описують форму меридіана. В околі кутових точок збільшується жорсткість оболонок, а це впливає на напружено-деформований стан до втрати стійкості. На рис. 3 наведено криві, які описують розподіл вздовж меридіана колових зусиль $t_{22} = T_{22}/(q_c R_1)$ для трьох варіантів оболонок. Нумерація кривих відповідає кількості дужок. Особливістю кривих *2* і *3* є те, що в околі кутових точок на них маємо додатні значення колових зусиль. На перший погляд, при дії зовнішнього тиску ці зусилля мають бути стискаючими (від'ємними). Але тут нема нічого дивного, якщо врахувати відомий факт [2, 10], що при дії зовнішнього тиску деякі оболонки обертання біля торців розтягуються, а при внутрішньому — стискаються. Отримані в роботі результати розрахунку сферичного пояса також показують наявність зони розтягуючих напружень в околі торців (крива *1*).

Запропонований варіант застосування методу дискретної ортогоналізації до розв'язання задач стійкості оболонок обертання з складною формою меридіана показав свою ефективність як при визначенні критичних навантажень, так і форм втрати стійкості. Одержані результати не протирічать відомим, а також доповнюють їх новими даними про вплив геомерії оболонок на їх несучу здатність при навантаженнях, які призводять до втрати стійкості.

1. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. – 1961. – **16**, вып. 3. – С. 171–174.
2. *Григоренко Я. М., Крюков Н. Н.* Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.
3. *Ванин Г. Л., Семенюк Н. П., Емельянов Р. Ф.* Устойчивость оболочек из армированных материалов. – Киев: Наук. думка, 1978. – 212 с.
4. *Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1975. – 376 с.
5. *Григолюк Э. И., Шалашилин В. И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – Москва: Наука, 1988. – 232 с.
6. *Борисейко А. В., Семенюк Н. П., Трач В. М.* О канонических уравнениях геометрически нелинейной теории тонких анизотропных оболочек // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 2. – С. 53–63.
7. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
8. *Semenyuk N. P., Trach V. M., Zhukova N. B.* Incremental analysis of the nonlinear behavior of thin shells // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No 9. – P. 1025–1031.
9. *Семенюк Н. П., Трач В. М., Остапчук В. В.* О нелинейном осесимметричном деформировании анизотропных сферических оболочек // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 10. – С. 83–95.
10. *Bushnell D.* Buckling of shells – pitfall for designers // AIAA J. – 1981. – **19**, No 19. – P. 1183–1226.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 01.07.2010

N. P. Semenyuk, N. B. Zhukova, N. I. Ivanova

On a variant of Godunov's method application to the solution of the stability problem for shells of revolution

A variant of calculations of buckling loads and the buckling mode of shells of revolution with application of Godunov's method is developed. The idea of the method of continuation on a parameter at the equality of all unknowns including the parameter of load is used. The examples of calculations of compound shells which are formed by the rotation of conjugate arcs of circles at an external pressure are presented.