УДК 517.5

Я. В. Заболотний

Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Ю. Трохимчуком)

Розглянуто відому гіпотезу В. М. Дубиніна про неперетинні області на комплексній площині і знайдено її частковий розв'язок. Цей результат вдалося отримати завдяки суттєвому вдосконаленню методу дослідження.

Одним з класичних напрямків розвитку геометричної теорії функцій комплексної змінної є розв'язання екстремальних задач на класах областей, що не перетинаються. Першим важливим результатом даної тематики була теорема Лаврентьєва [1]. Значний внесок у розвиток цього напрямку було зроблено багатьма дослідниками (див., напр., [1–13]). Зокрема, у роботі [7] було сформульовано таку екстремальну задачу:

Задача 1. Довести, що максимум функціонала

$$I_\gamma = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1}$$

де B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_n$ $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$ і $\gamma \leqslant n$ (див., напр., [2–12]), досягається для деякої конфігурації областей, які мають n-кратну симетрію.

Теорема 1. *При $n = 2$ і $\gamma \in (0; 1{,}1]$ максимум функціонала I_γ досягається на системі областей D_0, D_1, D_2 і точках $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, де D_k, a_k — відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)} dw^2. \tag{2}$$

Доведення. Для $\gamma = 1$ задача була повністю розв'язана в роботі [7]. З методу цієї роботи також випливає, що цей результат правильний і для $0 < \gamma < 1$.

Встановимо спочатку, що дане твердження правильне для $\gamma = 1{,}1$. Метод доведення спирається на застосування, аналогічні до теореми 5.2.3 роботи [9], методу розділяючого перетворення областей, який детально розроблений в роботі [7].

Згідно з умовою задачі, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, 2}$. Припустимо, для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < 2\pi.$$

Далі, означимо числа α_k таким чином:

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \qquad \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_2).$$

Нехай $P_k := \{w\colon \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $k = \overline{1, 2}$, $\arg a_3 = 2\pi$, $P_0 := P_2$, $P_3 := P_1$, $a_1 + a_2 = 2$.

При кожному $k = \overline{1,2}$ позначимо через $z_k(w)$ ту вітку многозначної аналітичної функції $z = -i(e^{-i \arg a_k} w)^{1/\alpha_k}$, $z_0 := z_2$, $z_3 := z_1$, яка конформно і однолисно відображає області P_k, $k = \overline{1,2}$, на праву півплощину $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Тоді для областей B_k, $k = \overline{1,2}$, таких, як і в задачі 1, позначимо через $D_k^{(1)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k\big(B_k \bigcap \overline{P_k}\big)$, що містить точку $z_k(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі, а через $D_k^{(1)}$ — об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}\big(B_k \bigcap \overline{P_{k-1}}\big)$, що містить точку $z_{k-1}(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі, $D_0^{(2)} := D_2^{(2)}$. Сімейство двох симетричних відносно уявної осі областей $\{D_k^{(1)}; D_{k-1}^{(2)}\}$ будемо називати результатом розділяючого перетворення області B_k. Для утворених областей, згідно з теоремою 3 роботи [8], правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^{2} r(B_k, a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{2} \alpha_k (r(D_{k+1}^{(i)}, i) r(D_k^{(2)}, -i))^{1/2}.$$

Аналогічно проводиться розділяюче перетворення області B_0 і маємо нерівність $r(B_0, 0) \leqslant \prod\limits_{k=1}^{2} (r(D_0^{(k)}; 0)^{\alpha_k^2/2}$.

Далі, як і в згаданій вище теоремі 5.2.3 [12], за допомогою розділяючого перетворення отримуємо нерівність

$$I_\gamma \leqslant \left[\prod_{k=1}^{2} \alpha_k r^{\gamma \alpha_k^2}(D_0, 0) r(D_1, i) r(D_2, -i)\right]^{1/2}, \tag{3}$$

де D_k — згадані вище кругові області квадратичного диференціала (1). Дана нерівність правильна для $\gamma \leqslant 1$ на основі результатів роботи [8]. При $\gamma > 1$ її застосування, взагалі кажучи, некоректне. Нам потрібно встановити умови її правильності для $\gamma = 1{,}1$.

Нехай для конкретності $r(B_0, 0) = p$. Тоді

$$I_\gamma = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) = p^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 4p^\gamma \sin^2 \frac{(2-\alpha_0)\pi}{2}, \tag{4}$$

де $\alpha_0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Остання нерівність правильна на основі теореми Лаврентьєва [1].

Доведемо, що області, які можуть бути екстремальними, задовольняють умову $\alpha_0 \leqslant$ $\leqslant 2/\sqrt{\gamma}$. Обчислимо значення функціонала

$$I_\gamma^0 = r^\gamma(D_0, a_0) \prod_{k=1}^{2} r(D_k, a_k).$$

Згідно з вище згаданою теоремою 5.2.3 роботи [9]

$$I_\gamma^0 = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Підставивши $\gamma = 1{,}1$ і $n = 2$, отримаємо, що $I_{1,1}^0 \approx 0{,}8315$.

Далі, застосувавши теорему Лаврентьєва [1] для областей B_0 і B_1, отримаємо, що $r(B_0, 0)r(B_1, a_1) \leqslant \mid a_1 \mid = 1$. Оскільки $r(B_0, 0) = p$, то $r(B_1, a_1) \leqslant 1/p$. Аналогічно, $r(B_2, a_2) \leqslant$ $\leqslant 1/p$. Тоді

$$I_\gamma \leqslant p^\gamma \frac{1}{p^2} = p^{\gamma-2}.$$

Звідси при $\gamma = 1{,}1$ маємо

$$\frac{I_\gamma}{I_\gamma^0} \leqslant \frac{p^{\gamma-2}}{I_\gamma^0} = \frac{p^{-0{,}9}}{0{,}8315}.$$

Дана частка менша одиниці при $p \geqslant 0{,}8315^{-1/0{,}9} \approx 1{,}2275 := p_0$, таким чином, для таких $p \geqslant p_0$ екстремальних конфігурацій областей не буде. Нехай тепер $p \leqslant p_0$. Тоді, згідно з (4), $I_\gamma \leqslant 4p^\gamma \cdot \sin^2(\alpha_0\pi/2)$. Далі, при $\alpha_0 \geqslant 2/\sqrt{\gamma}$, використовуючи властивості функції $y = \sin x$, матимемо, що при $\alpha_0 \geqslant 2/\sqrt{\gamma}$ виконується $I_\gamma \leqslant 4p^\gamma \cdot \sin^2 \pi(1 - 1/\sqrt{\gamma})$. Звідси $I_{1,1} \leqslant 0{,}0839 \ll I_{1,1}^0$. Тому екстремальних областей, відмінних від вказаних в умові теореми, не буде при $\alpha_0 \geqslant 2/\sqrt{\gamma}$. Звідси $\alpha_0 \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, і ми можемо застосовувати нерівність (3).

Далі, використовуючи результат, отриманий під час доведення теореми 4 з [9], запишемо таку нерівність:

$$I_\gamma \leqslant \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[\prod_{k=1}^{2} 2^{\sigma_k+6} \sigma_k^{\sigma_k+2} (2-\sigma_k)^{-(2-\sigma_k)^2/2} (2+\sigma_k)^{-(2+\sigma_k)^2/2} \right]^{1/2},$$

де $\sigma_k = \sqrt{\gamma}\alpha_k$. Введемо функцію

$$\Psi(\sigma) = 2^{\sigma+6}\sigma^{\sigma+2}(2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2}$$

для $\sigma \in [0, 2]$ і, використовуючи її поведінку на цьому проміжку, доведемо екстремальність конфігурації областей D_0, D_1, D_2.

$\Psi(\sigma)$ логарифмічно опукла на проміжку $[0; x_0]$, де $x_0 \approx 1{,}32$. На проміжку $[0; x_1]$, $x_1 \approx$ $\approx 1{,}05$, функція зростає від $\Psi(0) = 0$ до $\Psi(x_1) \approx 0{,}9115$, спадає на проміжку $[x_1; x_2]$, $x_2 \approx 1{,}6049$, до $\Psi(x_2) \approx 0{,}86$, а на проміжку $[x_2; 2]$ — зростає до $\Psi(2) = 1$. Точка, для якої $\Psi(x_3) = \Psi(x_1) \approx 0{,}9115$, $x_3 \approx 1{,}9$. Тепер, використовуючи рівність $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sqrt{\gamma}$, доведемо, що $\Psi(\sigma_1)\Psi(\sigma_2) \leqslant (\Psi(\sqrt{\gamma}))^2 \approx 0{,}8308$. Для $\sigma_k \in [0; x_0]$ відповідний висновок робимо із логарифмічної опуклості функції $\Psi(\sigma)$. Для $\sigma_2 \in [x_0; x_3]$ із властивостей графіка функції $\Psi(\sigma)$ маємо $\Psi(\sigma_2) \leqslant \Psi(\sqrt{\gamma})$ і $\Psi(\sigma_1) \leqslant \Psi(\sqrt{\gamma})$, а тому $\Psi(\sigma_1)\Psi(\sigma_2) \leqslant (\Psi(\sqrt{\gamma}))^2$. Якщо ж $\sigma_2 \in [x_3; 2]$, то $\Psi(\sigma_2) < \Psi(2) = 1$, $\Psi(\sigma_1) < \Psi(0{,}2) \ll 0{,}4$, звідси $\Psi(\sigma_1) \cdot \Psi(\sigma_2) < 0{,}4 < (\Psi(\sqrt{\gamma}))^2$. Отже, $I_\gamma \leqslant I_\gamma^0(x_1)$, тому екстремальних конфігурацій областей ми не отримаємо.

Для $\gamma = 1,1$ теорему доведено. Далі, функціонал I_γ^0 як функція від γ монотонно спадає на проміжку $[1; 1{,}1]$, тому при $\gamma \in [1; 1{,}1]$ $I_\gamma^0 > I_{1,1}^0$. Функція $\Psi(\sigma)$ є монотонно зростаючою на цьому ж проміжку, як і функція $4p^\gamma \sin^2(\alpha\pi/2)$. Тому $I_\gamma/I_\gamma^0 \leqslant I_{1,1}/I_{1,1}^0 < 1$. Звідси при $\gamma \in [1; 1{,}1]$ $I_\gamma \leqslant I_\gamma^0$, а тому I_γ^0 — шукана екстремальна конфігурація областей.

Теорему доведено.

Автор висловлює подяку О. К. Бахтіну за постановку задачі, а також цінні зауваження та поради щодо написання цієї роботи.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
4. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
5. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1955. – **5**. – С. 37–43.
6. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
7. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3–76.
8. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
9. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. – 308 с.
10. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 7–13.
11. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 868–886.
12. *Бахтин А. К.* Точные оценки для внутренних радиусов систем неналегающих областей и открытых множеств // Там само. – 2007. – **59**, № 12. – С. 1601–1618.
13. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Там само. – 2009. – **61**, № 5. – С. 596–610.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 13.07.2010

Ja. V. Zabolotnij

Application of a dividing transformation in the problems of nonoverlapping domains

The well-known V. M. Dubynin's hypothesis concerning with nonoverlapping domains on the complex plane is considered, and its partial solution is found due to an essential improvement of the method of studies.