УДК 531.36+531.39

Д. М. Лила

Об уравнениях движения одной механической системы

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Одержано рівняння плоского вертикального руху гібридної моделі механічної системи, яка складається з горизонтально розміщеної струни і підвішеного в деякій її точці математичного маятника.

Исследование колебаний струн, стержней, балок, мембран, пластин, нагруженных сосредоточенными массами, находит широкое применение в физике и технике (см. [1] и библиографию там). В настоящей работе, согласно [1], п. 4.2, приведен анализ уравнений движения гибридной системы, состоящей из математического маятника и упругой струны, взаимодействующих между собой [2].

Постановка задачи. Изучим некоторые особенности плоских движений механической системы, моделируемой горизонтально расположенной в поле тяжести материальной упругой изотропной струной и материальной точкой, подвешенной в некоторой точке струны на невесомом нерастяжимом стержне (рис. 1). В декартовой прямоугольной системе координат Oxy положение точек струны будем определять по величине их смещения $w(t, y)$ от горизонтали $x = 0$ (здесь $t \in [t_0, \infty)$, $y \in [0, L]$), а положение колеблющейся сосредоточенной массы m — координатами $x = w(t, y_0) + l\cos\varphi$, $y = y_0 + l\sin\varphi$, где y_0, l и φ — ордината точки подвеса маятника, длина стержня и угол отклонения стержня от вертикали, соответственно. Предполагается, что угол φ достаточно мал (малые нелинейные колебания маятника), чтобы не учитывать смещения точек струны вдоль оси $x = 0$. Стержень будем рассматривать как реономную связь

$$(x - w(t, y_0))^2 + (y - y_0)^2 = l^2.$$

Вычисляя производные $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и вводя обозначение $\rho(y)$ для линейной плотности струны, получаем выражение кинетической энергии данной механической системы в виде

$$T = \frac{1}{2}m(w_t^2(t, y_0) - 2l\sin\varphi w_t(t, y_0)\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}\int\limits_0^L \rho(y)w_t^2(t, y)\,dy. \tag{1}$$

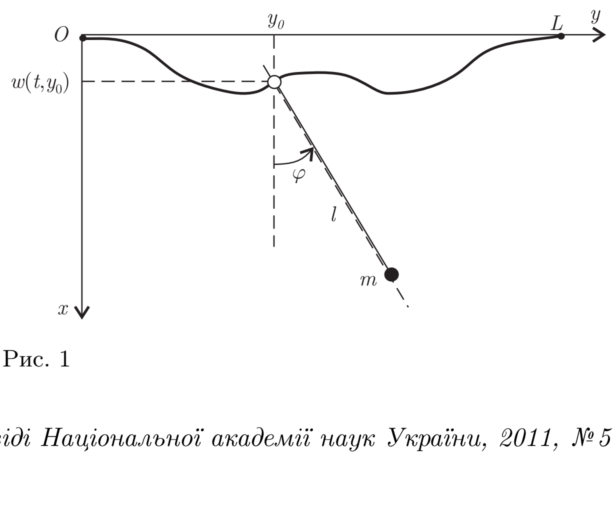

Рис. 1

Потенциальная энергия представляется выражением

$$\Pi = -mg(w(t, y_0) + l\cos\varphi) + \int\limits_0^L \left(\frac{1}{2}\mu w_y^2(t, y) - (p(t, y) + \rho(y)g)w(t, y)\right)dy, \tag{2}$$

где $\dfrac{1}{2}\mu w_y^2(t, y)dy$, $-p(t, y)w(t, y)dy$ и $-\rho(y)gw(t, y)dy$ — мгновенная элементарная потенциальная энергия упругой силы, внешней нормальной силы, эквивалентной дополнительному удельному весу $p(t, y)$ струны, и силы тяжести, соответственно.

Для получения уравнений движения исследуемой системы воспользуемся обобщенным интегральным вариационным принципом Гамильтона–Остроградского

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta\Pi + \delta W)\, dt = 0,$$

$$\delta\varphi(t_0) = \delta\varphi(t_1) = 0, \qquad \delta w(t_0, y) = \delta w(t_1, y) = 0,$$

где $\delta W = Q_\varphi\delta\varphi = -k\dot{\varphi}\delta\varphi$ — виртуальная работа непотенциальной силы трения в точке подвеса.

Получение уравнений движения. После варьирования выражений (1), (2) и использования при необходимости интегрирования по частям совместно с граничными условиями

$$w(t, 0) = w(t, L) = 0,$$

а также определяющих свойств δ-функции путем приравнивания к нулю коэффициентов при независимых вариациях $\delta\varphi$ и δw получим

$$\begin{gathered} \ddot{\varphi} + \frac{k}{ml^2}\dot{\varphi} + \frac{1}{l}(g - w_{tt}(t, y_0))\sin\varphi = 0, \\ [\rho(y) + m\delta(y - y_0)]w_{tt} = \mu w_{yy} + p(t, y) + \rho(y)g + m(g + l(\sin\varphi\ddot{\varphi} + \cos\varphi\dot{\varphi}^2))\delta(y - y_0). \end{gathered} \tag{3}$$

Система уравнений (3) является гибридной, поскольку состоит из двух связанных уравнений, одно из которых представляет собой обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, а другое — линейное неоднородное уравнение второго порядка в частных производных. Отличительная особенность уравнений движения (3) в сравнении с аналогичными, описывающими движения закрепленной на концах струны с дополнительно сосредоточенными непосредственно на ней (а не через подвес) массами, заключается в наличии δ-функции, кроме коэффициентов соответствующего однородного уравнения для струны, еще и в коэффициенте при внешней нестационарной возбуждающей силе, вносящей в движение влияние колеблющегося математического маятника. Обозначив $\Phi(t) = \sin\varphi\ddot{\varphi} + \cos\varphi\dot{\varphi}^2$ и полагая $p \equiv 0$, $\rho \equiv \mathrm{const}$, на основании уравнений (3) получаем систему

$$\begin{gathered} \ddot{\varphi} + \frac{k}{ml^2}\dot{\varphi} + \frac{1}{l}(g - w_{tt}(t, y_0))\sin\varphi = 0, \\ [\rho + m\delta(y - y_0)]w_{tt} = \mu w_{yy} + \rho g + m(g + l\Phi(t))\delta(y - y_0), \\ \varphi(t_0) = \varphi_0, \qquad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0, \\ w(t, 0) = w(t, L) = 0, \qquad w(t_0, y) = w_0(y), \qquad w_t(t_0, y) = \dot{w}_0(y). \end{gathered} \tag{4}$$

Можно показать, что эта начально-краевая задача сводится к задаче Коши для системы связанных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Систему образуют нелинейное скалярное уравнение и линейное уравнение относительно некоторой абстрактной функции в банаховом пространстве. Проблема существования решений системы (4) исследуется методами функционального анализа и являет собой отдельную задачу в операторных терминах.

Рассмотрим вначале второе уравнение системы (4). Решение соответствующего однородного уравнения ищем в виде

$$w(t,y) = v(t)u(y), \tag{5}$$

поэтому в общем случае

$$w(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)(C_{1n}\sin\nu_n t + C_{2n}\cos\nu_n t), \tag{6}$$

где собственные числа ν_n^2 и собственные функции $u_n(y)$ удовлетворяют спектральной задаче

$$\begin{aligned} &\mu u'' + \nu^2[\rho + m\delta(y-y_0)]u = 0,\\ &u(0) = u(L) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

("$'$" обозначено производную по y). Ее решения найдем, исходя из решений

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\frac{\pi n}{L}, \qquad u_n(y) = a_n \sin\frac{n\pi y}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

соответствующей (7) "однородной" спектральной задачи

$$\mu u'' + \omega^2 \rho u = 0, \qquad u(0) = u(L) = 0. \tag{9}$$

Поскольку

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{s\pi y}{L}dy = \begin{cases} 0, & n \neq s,\\ \dfrac{L}{2}, & n = s,\end{cases}$$

то после подстановки выражений для функций $u_n(y)$ из (8) в (7) и некоторых преобразований последовательно получим:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu n^2\pi^2 a_n}{L^2}\sin\frac{n\pi y}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\nu^2\rho a_n \sin\frac{n\pi y}{L} = -\nu^2 m\delta(y-y_0)u(y),$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu n^2\pi^2 a_n}{L^2}\sin\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{s\pi y}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\nu^2\rho a_n \sin\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{s\pi y}{L} =$$
$$= -\nu^2 m\delta(y-y_0)u(y)\sin\frac{s\pi y}{L},$$

$$-\frac{\mu n^2\pi^2 a_n}{L^2}\int_0^L \sin^2\frac{n\pi y}{L}dy + \nu^2\rho a_n\int_0^L \sin^2\frac{n\pi y}{L}dy = -\nu^2 m u(y_0)\sin\frac{n\pi y_0}{L}, \tag{10}$$

$$a_n = \frac{2Lm\nu^2 u(y_0)\sin\dfrac{n\pi y_0}{L}}{\mu n^2\pi^2 - \nu^2\rho L^2},$$

$$u(y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi y_0}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Lm\nu^2 u(y_0) \sin \dfrac{n\pi y_0}{L}}{\mu n^2\pi^2 - \nu^2\rho L^2} \sin \frac{n\pi y_0}{L},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m\nu^2 \sin^2 \dfrac{n\pi y_0}{L}}{M(\omega_n^2 - \nu^2)} = 1,$$

где $M = \rho L$ — масса струны. Уравнению (10) для определения собственных чисел исходной спектральной задачи или же смещений частотного спектра при нагрузке струны сосредоточенной массой m можно после дифференцирования по m и проверки условия

$$\sin \frac{n_0\pi y_0}{L} \neq 0 \tag{11}$$

придать вид обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\nu_s^2}{dm} = -\frac{M}{2m^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 \sin^2 \dfrac{n\pi y_0}{L}}{(\omega_n^2 - \nu_s^2)^2}} \tag{12}$$

с начальным условием

$$\nu_s^2(0) = \omega_{n_0}^2. \tag{13}$$

При этом искомые собственные функции получаем в виде

$$u_s(y) = u_s(y_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m\nu_s^2 \sin \dfrac{n\pi y_0}{L}}{M(\omega_n^2 - \nu_s^2)} \sin \frac{n\pi y}{L}, \tag{14}$$

где с учетом условия ортогональности с нагрузкой

$$\int_0^L u_r(y) u_s(y) [\rho + m\delta(y - y_0)]\, dy = \delta_{rs} \tag{15}$$

(δ_{rs} — символ Кронекера) следует считать, что

$$u_s^2(y_0) = \frac{1}{m + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m^2\nu_s^4 \sin^2 \dfrac{n\pi y_0}{L}}{M(\omega_n^2 - \nu_s^2)^2}}. \tag{16}$$

Способ изменения вида уравнений движения. Для выявления наиболее существенных особенностей взаимного влияния движений струны и маятника на динамику системы (4) будем использовать идею метода нормальных форм колебаний, заключающуюся в нашем случае в возможности представления решения исходного неоднородного уравнения в частных производных в виде

$$w(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) u_n(y), \tag{17}$$

где коэффициенты q_n выписанной линейной комбинации удовлетворяют уравнениям Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-\Pi)}{\partial\dot{q}_n}\right)-\frac{\partial(T-\Pi)}{\partial q_n}=0,\qquad n=1,2,\ldots, \tag{18}$$

играя вместе с переменной φ роль независимых координат. Подставляя $w(t,y)$ в виде (17) в выражения для кинетической и потенциальной энергии (1), (2) и учитывая, что

$$\frac{1}{2}mw_t^2(t,y_0)+\frac{1}{2}\rho\int\limits_0^L w_t^2(t,y)\,dy=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\dot{q}_n\dot{q}_j\int\limits_0^L u_n(y)u_j(y)[\rho+m\delta(y-y_0)]\,dy=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n^2,$$

$$\frac{1}{2}\mu\int\limits_0^L w_y^2(t,y)\,dy=\frac{1}{2}\mu\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}q_nq_j\int\limits_0^L u_n'(y)u_j'(y)\,dy=-\frac{1}{2}\mu\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}q_nq_j\int\limits_0^L u_n(y)u_j''(y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j^2q_nq_j\int\limits_0^L u_n(y)u_j(y)[\rho+m\delta(y-y_0)]\,dy=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n^2q_n^2,$$

на основании (18) уравнения (4) получаем в виде

$$\begin{aligned}&\ddot{q}_s+\nu_s^2q_s=\beta_s+mlu_s(y_0)[\sin\varphi\ddot{\varphi}+\cos\varphi\dot{\varphi}^2],\qquad s=1,2,\ldots,\\&\ddot{\varphi}+\frac{k}{ml^2}\dot{\varphi}+\frac{1}{l}\left(g-\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y_0)\ddot{q}_n\right)\sin\varphi=0,\end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\beta_s=mgu_s(y_0)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\nu_s^2\sin\dfrac{(2n-1)\pi y_0}{L}}{\pi(2n-1)(\omega_{2n-1}^2-\nu_s^2)}\right].$$

При этом

$$q_s(t_0)=w_{0s},\qquad \dot{q}_s(t_0)=\dot{w}_{0s},\qquad \varphi(t_0)=\varphi_0,\qquad \dot{\varphi}(t_0)=\dot{\varphi}_0, \tag{20}$$

если учесть разложения начальных условий

$$w_0(y)=\sum_{n=1}^{\infty}w_{0n}u_n(y), \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}&w_{0n}=\int\limits_0^L w_0(y)u_n(y)[\rho+m\delta(y-y_0)]\,dy=\rho\int\limits_0^L w_0(y)u_n(y)\,dy+mw_0(y_0)u_n(y_0),\\&\dot{w}_0(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{w}_{0n}u_n(y),\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\dot{w}_{0n} = \rho \int\limits_0^L \dot{w}_0(y) u_n(y)\, dy + m\dot{w}_0(y_0) u_n(y_0).$$

Рассматривая бесконечную систему нелинейных связанных осцилляторов, в нормальной форме будем иметь следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot{q}_1 = \xi_1,\\
&\dot{q}_2 = \xi_2,\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&\dot{q}_s = \xi_s,\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&\dot{\varphi} = \zeta,\\
&\dot{\xi}_1 = \beta_1 - \nu_1^2 q_1 +\\
&\qquad + mlu_{10}\left(\zeta^2\cos\varphi - \frac{\left[\dfrac{g}{l} + a + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n^2 u_{n0}}{l} q_n + b\zeta^2\cos\varphi\right]\sin^2\varphi + \dfrac{k}{ml^2}\zeta\sin\varphi}{1 + b\sin^2\varphi}\right),\\
&\dot{\xi}_2 = \beta_2 - \nu_2^2 q_2 +\\
&\qquad + mlu_{20}\left(\zeta^2\cos\varphi - \frac{\left[\dfrac{g}{l} + a + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n^2 u_{n0}}{l} q_n + b\zeta^2\cos\varphi\right]\sin^2\varphi + \dfrac{k}{ml^2}\zeta\sin\varphi}{1 + b\sin^2\varphi}\right),\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&\dot{\xi}_s = \beta_s - \nu_s^2 q_s +\\
&\qquad + mlu_{s0}\left(\zeta^2\cos\varphi - \frac{\left[\dfrac{g}{l} + a + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n^2 u_{n0}}{l} q_n + b\zeta^2\cos\varphi\right]\sin^2\varphi + \dfrac{k}{ml^2}\zeta\sin\varphi}{1 + b\sin^2\varphi}\right),\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&\dot{\zeta} = -\frac{\left[\dfrac{g}{l} + a + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n^2 u_{n0}}{l} q_n + b\zeta^2\cos\varphi\right]\sin\varphi + \dfrac{k}{ml^2}\zeta}{1 + b\sin^2\varphi},\\
&(q_1(t_0), q_2(t_0), \ldots, q_s(t_0), \ldots, \varphi(t_0), \xi_1(t_0), \xi_2(t_0), \ldots, \xi_s(t_0), \ldots, \zeta(t_0))^T =\\
&\qquad = (w_{01}, w_{02}, \ldots, w_{0s}, \ldots, \varphi_0, \dot{w}_{01}, \dot{w}_{02}, \ldots, \dot{w}_{0s}, \ldots, \dot{\varphi}_0)^T,
\end{aligned} \tag{23}$$

где обозначено

$$u_{10} = u_1(y_0), u_{20} = u_2(y_0), \ldots, u_{s0} = u_s(y_0), \ldots, a = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n0}\beta_n}{l}, b = -m\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}^2.$$

Обсуждение результатов. Возвращаясь к частотному уравнению (10) и интегрированию начальной задачи (12), (13), определим вначале предельное значение $f(0+0, \omega_{n_0}^2 - 0)$ правой части дифференциального уравнения (12). Для этого на основании предельного перехода в (10) следует учесть, что

$$\frac{m}{\omega_{n_0}^2 - \nu_s^2} \sim \frac{M}{2\omega_{n_0}^4 \sin^2 \dfrac{n_0 \pi y_0}{L}} \tag{24}$$

при $m \to 0 + 0$, $\nu_s^2 \to \omega_{n_0}^2 - 0$. Тогда

$$f(0 + 0, \omega_{n_0}^2 - 0) = -\frac{2\omega_{n_0}^2 \sin^2 \dfrac{n_0 \pi y_0}{L}}{M}. \tag{25}$$

Заметим, что, монотонно убывая, функции $\nu_s^2(m)$ являются выпуклыми на некотором интервале $(0, m_0)$. Действительно, с учетом соотношений (12) и (24) имеем

$$\frac{d^2 \nu_s^2(0+0)}{dm^2} = -\frac{8\omega_{n_0}^4 \sin^4 \dfrac{n_0 \pi y_0}{L}}{M^2(\omega_{n_0}^2 - [\omega_{n_0}^2 - 0])} < 0. \tag{26}$$

Формируя массив соответствующих значений m_i, ν_{si}^2, $u_{si}(y_0)$, β_{si}, где $s = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, [m_{\max}/(\Delta m)]$, параметров системы (19), имеем возможность со сколь угодно высокой степенью адекватности заменить исходную гибридную систему (4), моделирующую рассматриваемую механическую систему струна — маятник, стационарной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (19), приводящейся к наиболее удобной при анализе нормальной форме (23).

Автор выражает благодарность акад. НАН Украины А. А. Мартынюку за постановку задачи [1] и докт. физ.-мат. наук В. И. Слынько за внимание и полезное обсуждение результатов.

1. *Лила Д. М.* Достаточные условия устойчивости крупномасштабных нестационарных механических систем: Дис. … канд. физ.-мат. наук, 01.02.01. – Киев, 2009. – 150 с.
2. *Лила Д. М.* Достатні умови стійкості великомасштабних нестаціонарних механічних систем: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук, 01.02.01. – Київ, 2009. – 19 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.08.2010

D. M. Lila

On the equations of motion of a mechanical system

The hybrid mechanical system which consists of a horizontally located string and a mathematical pendulum suspended at one of its points has been considered. The equation of plane vertical motion of such hybrid mechanical system has been obtained.