УДК 539.3

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Про одну змішану систему рівнянь поперечних коливань пластин у полярних координатах

Систему кірхгофових рівнянь коливань пластин у полярних координатах вперше наведено в операторній гамільтоновій формі чотирьох рівнянь за радіальною координатою.

У роботах [1–4] рівняння кірхгофової та уточненої (типу Тимошенка) теорій поперечних коливань пластин в прямокутних координатах перетворені до змішаних систем, відповідно, четвертого та шостого порядків. Показано, що завдяки певному вибору "канонічних" змінних і операторної функції Гамільтона ці системи є операторними канонічними системами за прямокутною координатою. Нижче систему кірхгофових рівнянь коливань пластин у полярних координатах вперше перетворено до змішаної системи чотирьох рівнянь в операторній гамільтоновій формі за радіальною координатою.

У кірхгофовій (класичній) теорії поперечних коливань тонкої пластини, віднесеної до полярних координат r, θ в її серединній площині, згинальні M_{rr} і $M_{\theta\theta}$ та крутильний $M_{r\theta} = M_{\theta r}$ моменти, перерізуючі сили Q_r, Q_θ і прогин w пов'язані рівняннями коливань

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial r M_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{M_{\theta\theta}}{r} - Q_r = 0,\\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_\theta = 0,\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial r Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1}$$

і матеріальними співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&M_{rr} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right),\\
&M_{\theta\theta} = -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right),\\
&M_{r\theta} = -(1-\nu)D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right),
\end{aligned} \tag{2}$$

в яких враховані формули для деформацій. У залежностях (1), (2) ρ, E, ν — густина, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона матеріалу; $D = I_1 E/(1-\nu^2)$ — згинальна жорсткість; h — товщина пластини; $I_1 = h^3/12$ — момент інерції поперечного перерізу на одиницю довжини. В теорії використовуються також формули для кутів повороту нормалі до вигнутої поверхні пластини

$$\psi_r = \frac{\partial w}{\partial r}, \qquad \psi_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{3}$$

і узагальнені перерізуючі сили

$$Q_r^* = Q_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}, \qquad Q_\theta^* = Q_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r}. \tag{4}$$

Запишемо систему рівнянь (1)–(4) у формі

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial rM_{rr}}{\partial r} = M_{\theta\theta} + Q_r - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r},\\
&\frac{\partial w}{\partial r} = \psi_r,\\
&\frac{\partial \psi_r}{\partial r} = -\frac{M_{rr}}{D} - \nu\left(\frac{\psi_r}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right),\\
&\frac{\partial rQ_r}{\partial r} = r\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Система (5) наведена в операторній нормальній формі Коші за радіальною координатою r. Згинальний момент M_{rr}, прогин w, кут повороту нормалі ψ_r і узагальнена перерізуюча сила Q_r^* при досконалому механічному контакті залишаються неперервними на перерізах $r = \mathrm{const}$ розриву механічних характеристик пластини. Функції rM_{rr}, w, ψ_r, rQ_r^* (див. також роботу [5]) вибираємо за базові розв'язуючі функції і відповідним чином перетворимо одержану систему.

З цією метою в системі (5) перерізуючу силу Q_r, користуючись першою з формул (4), замінимо на узагальнену перерізуючу силу Q_r^* і виключимо з рівнянь (5) згинальний $M_{\theta\theta}$ і скручуючий $M_{r\theta}$ моменти і перерізуючу силу Q_θ.

Виразимо згинальний $M_{\theta\theta}$ і скручуючий $M_{r\theta}$ моменти та перерізуючу силу Q_θ через базові функції rM_{rr}, w, ψ_r, користуючись рівняннями (2) і (1):

$$\begin{aligned}
&M_{\theta\theta} = \nu M_{rr} - (1-\nu^2)D\left(\frac{1}{r}\psi_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right),\\
&M_{r\theta} = -(1-\nu^2)D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right),\\
&Q_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\nu M_{rr} - (1-v^2)D\left(\frac{1}{r}\psi_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right] - (1-\nu)D\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Після відповідних перетворень рівнянь (5) одержимо таку систему змішаних рівнянь класичної теорії поперечних коливань пластини в полярних координатах в операторній нормальній формі Коші:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial rM_{rr}}{\partial r} = \frac{\nu}{r}rM_{rr} - (1-\nu)(3+\nu)D\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - (1-\nu^2)D\frac{\psi_r}{r} + 2(1-\nu)D\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2} + rQ_r^*,\\
&\frac{\partial w}{\partial r} = \psi_r,\\
&\frac{\partial\psi_r}{\partial r} = -\frac{1}{Dr}rM_{rr} - \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - \frac{\nu}{r}\psi_r,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{\partial rQ_r^*}{\partial r} = -\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 rM_{rr}}{\partial\theta^2} + (1-\nu^2)D\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} - 2(1-\nu)D\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + r\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + $$
$$+ (1-\nu)(3+\nu)D\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2}.$$

Керуючись загальною ідеєю [6], покажемо, що система (7) є операторною гамільтоновою системою [7] за просторовою координатою r

$$\frac{\partial q_i}{\partial r} = \frac{\partial\widehat{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial r} = -\frac{\partial\widehat{H}}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{8}$$

Для цього "канонічні" змінні q_i, p_i і операторну функцію Гамільтона візьмемо у вигляді

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rM_{rr} \\ w \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_r \\ rQ_r^* \end{bmatrix},$$
$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\widehat{P}_{ij}q_iq_j + \widehat{R}_{ij}q_ip_j + \frac{1}{2}\widehat{Q}_{ij}p_ip_j, \tag{9}$$

де елементи операторних симетричних матриць $\widehat{P}_{ij}$, $\widehat{Q}_{ij}$ і ненульові елементи операторної матриці $\widehat{R}_{ij}$ мають такі значення:

$$-\widehat{P}_{11} = -\frac{1}{Dr}, \qquad -\widehat{P}_{12} = -\widehat{P}_{21} = -\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$
$$-\widehat{P}_{22} = (1-\nu^2)D\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} - 2(1-\nu)D\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + r\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$
$$\widehat{Q}_{11} = -(1-\nu^2)D\frac{1}{r} + 2(1-\nu)D\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \qquad \widehat{Q}_{12} = \widehat{Q}_{21} = 1, \qquad \widehat{Q}_{22} = 0, \tag{10}$$
$$\widehat{R}_{11} = \frac{\nu}{r}, \qquad \widehat{R}_{12} = -(1-\nu)(3+\nu)D\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \qquad \widehat{R}_{21} = \widehat{R}_{22} = 0.$$

В операторному виразі (9) і при виконанні диференціювання в (8) оператори (10) $\widehat{P}_{ij}$, $\widehat{Q}_{ij}$, $\widehat{R}_{ij}$ вважаються сталими величинами. В результаті такої процедури з (8) одержимо систему (7). Це і доводить, що система (7) є операторною гамільтоновою системою за просторовою координатою r.

Коефіцієнти системи (7), а значить і рівнянь (1), (2), можуть бути довільними функціями координати r з розривами першого роду.

Функції $M_{\theta\theta}$, $M_{r\theta}$, Q_r, Q_θ визначаються через основні розв'язуючі функції за формулами (6) і (4).

Операторну гамільтонову систему (7) за просторовою координатою r можна одержати з "ізохронної" варіації такого функціонала:

$$I(rM_{rr}, w, \psi_r, rQ_r^*) = \int_a^b \left\{\psi_r\frac{\partial(rM_{rr})}{\partial r} + (rQ_r^*)\frac{\partial w}{\partial r} - \left\{\frac{1}{2}\frac{1}{Dr}(rM_{rr})^2 + \right.\right.$$
$$+\frac{\nu}{r^2}\partial_\theta^2(rM_{rr})w + \frac{1}{2}\left[2(1-\nu)D\frac{1}{r^3}\partial_\theta^2 - (1-\nu^2)D\frac{1}{r^3}\partial_\theta^4 - r\rho h\partial_t^2\right]w^2 + \frac{\nu}{r}(rM_{rr})\psi_r -$$
$$\left.\left. -(1-\nu)(3+\nu)D\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 w\psi_r + \frac{1}{2}\left[(1-\nu^2)D\frac{1}{r} + 2(1-\nu)D\frac{1}{r}\partial_\theta^2\right]\psi_r^2 + \psi_r(Q_r^*)\right\}\right\}dr. \tag{11}$$

При його варіюванні треба керуватися правилом

$$\delta(P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij})a_m b_n = (P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij})(a_m \delta b_n + b_n \delta a_m) =$$
$$= \delta b_n (P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}) a_m + \delta a_m (P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}) b_n. \qquad (12)$$

Таким чином, в даній роботі система кірхгофових рівнянь коливань пластин у полярних координатах вперше перетворена до змішаної системи чотирьох рівнянь в операторній гамільтоновій формі за радіальною координатою. При гармонічних коливаннях $f(r,\theta,t) = \operatorname{Re} f^a(r,\theta) \exp i\omega t$ ця система стає системою звичайних диференціальних рівнянь в гамільтоновій формі за просторовою координатою відносно амплітудних значень польових функцій.

1. *Шульга О. М.* Построение решений уравнений колебаний классической теории пластины с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 109–113.
2. *Шульга О. М.* Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластины с периодическими по одной координате параметрами // Там же. – 1996. – Вып. 26. – С. 105–111.
3. *Шульга М. О.* О гамильтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин // Там же. – 2009. – Вып. 45. – С. 3–7.
4. *Шульга М. О.* О гамильтоновом формализме в кирхгофовой теории изгиба пластин // Там же. – 2010. – Вып. 46. – С. 11–15.
5. *Шульга В. М.* До розв'язку рівнянь теорії пружності в циліндричних координатах // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 80–82.
6. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
7. *Павловський М. А.* Теоретична механіка. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Надійшло до редакції 30.09.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shul'ga**

On a mixed system of equations for transversal vibrations of plates in polar coordinates

The system of four Kirchhoff equations of vibrations of plates in polar coordinates in the operator Hamilton form on a radial coordinate is first represented.