ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

М. В. Гончаренко, Н. К. Радякин

Усредненная модель колебаний упругой среды с большим количеством мелких каверн, заполненных несжимаемой жидкостью с малой вязкостью

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Розглядається початково-крайова задача, що описує нестаціонарні коливання пружного середовища з великою кількістю дрібних каверн, що заповнені в'язкою нестислою рідиною. Вивчається асимптотична поведінка розв'язку, коли діаметри каверн та в'язкість рідини прямують до нуля. Кількість каверн прямує до нескінченності та розташовуються вони "об'ємно". Побудовано усереднене рівняння, що описує головний член асимптотики. Це рівняння є моделлю поширення хвиль у середовищах типу зволоженого грунту, гірських порід та деяких біологічних тканин.

Рассмотрим композитную среду, состоящую из упругой и жидкой фаз. А именно, пусть Ω — фиксированная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, а G_ε^α — подобласти в Ω с гладкими непересекающимися границами $\partial G_\varepsilon^\alpha$. Размеры и количество подобластей G_ε^α зависят от малого параметра ε так, что при $\varepsilon \to 0$ диаметры G_ε^α стремятся к нулю, а их количество $N(\varepsilon)$ — к ∞ и G_ε^α располагаются «объемно» в области Ω. Предположим, что область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N(\varepsilon)} \overline{G}_\varepsilon^\alpha$ занята упругой средой, а подобласти G_ε^α (каверны в этой среде) заполнены вязкой несжимаемой жидкостью.

Нестационарные колебания такой среды описываются следующей системой уравнений:

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n}(a_{npqr}\gamma_{qr}[u])e^p = 0, \qquad x \in \Omega_\varepsilon, \tag{1}$$

$$\rho_f \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \mu_\varepsilon \Delta v_\varepsilon = \nabla p_\varepsilon, \qquad \operatorname{div} v_\varepsilon = 0, \qquad x \in G_\varepsilon = \bigcup_\alpha G_\varepsilon^\alpha, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = v_\varepsilon, \qquad x \in \partial G_\varepsilon, \tag{3}$$

$$T_f[v_\varepsilon] = T_s[u_\varepsilon], \qquad x \in \partial G_\varepsilon. \tag{4}$$

Здесь $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t)$ — вектор упругих смещений; $\rho_s = \mathrm{const}$ — плотность упругой среды; e^p — орт оси x_p,

$$\gamma_{qr}[u] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_q}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_q}\right) -$$

компоненты тензора деформации среды; a_{npqr} — компоненты тензора упругости, который обладает следующими свойствами симметрии: $a_{iklm} = a_{kilm} = a_{lmik} = a_{ikml}$ и положительной определенности [1], т. е.

$$\sum_{n,p,q,r=1}^{3} a_{npqr} t_{np} t_{qr} \geqslant C \sum_{n,p=1}^{3} |t_{np}|^2, \qquad \forall \{t_{np}\}_{n,p=1}^{3}, \qquad C > 0.$$

$v_\varepsilon = v_\varepsilon(x,t)$ — скорость жидкости; p_ε — давление; $\rho_f = \mathrm{const}$ — плотность жидкости;

$$T_f[v] = \mu_\varepsilon \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[v]\nu_i e^k - p\nu -$$

вектор напряжений на поверхности $\partial\Omega_\varepsilon$ в жидкости;

$$T_s[u] = \sum_{n,p,q,r=1}^{3} a_{npqr}\gamma_{qr}[u]\nu_n e^q - \tag{5}$$

вектор напряжений в упругой среде; ν — внешняя нормаль к поверхности $\partial G_\varepsilon^\alpha$.

Условие (3) означает совпадение на границе раздела векторов скоростей упругой и жидкой сред, а условие (4) — совпадение векторов напряжений.

Дополним эту систему граничными и начальными условиями

$$u_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \tag{6}$$

$$u_\varepsilon(x,0) = U_\varepsilon^0, \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = U_\varepsilon^1(x), \qquad x \in \Omega_\varepsilon, \tag{7}$$

$$v_\varepsilon(x,0) = V_\varepsilon^1(x), \qquad x \in G_\varepsilon. \tag{8}$$

Предполагается, что $U_\varepsilon^1 \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$, $V_\varepsilon^1 \in W_2^1(G_\varepsilon)$, $\mathrm{div} V_\varepsilon^1 = 0$, $U_\varepsilon^1 = V_\varepsilon^1$, $x \in \partial G_\varepsilon$, $U_\varepsilon^0 \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$, $U_\varepsilon^0|_{\partial\Omega} = 0$ и $\int_{\partial G_\varepsilon} U_{\varepsilon n}^0 ds = 0$.

Теорема 1. *Задача* (1)–(8) *имеет единственное обобщенное решение* $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon, p_\varepsilon\}$.

Задача (1)–(8) описывает распространение волн в упругой среде (рассматривается простейшая модель увлажненной упругой среды). Такими средами могут быть увлажненные почвы, пористые горные породы, биологические ткани. При этом жидкость, заполняющая поры имеет очень малую вязкость. Представляет интерес получение усредненной модели, описывающей распространение волн в таких средах. С этой целью в данной работе изучается асимптотическое поведение решения задачи (1)–(8) при $\varepsilon \to 0$, когда вместе с диаметрами пор к нулю стремится и вязкость жидкости.

Аналогичный вопрос изучался в работах [2–4], где вязкость жидкости не зависела от ε. Нами получена усредненная модель колебаний при малой вязкости жидкости, заполняющей поры.

Для того чтобы сформулировать основной результат, уточним постановку задачи.

Предположим, что расположение каверн локально близко к периодическому. Это означает, что каверны G_ε^α находятся в периодически расположенных параллелепипедах, имеют одинаковую форму, а диаметры, ориентации и координаты центров масс каверн, находящихся в соседних параллелепипедах, отличаются на малую величину. А именно, предположим, что пространство $\mathbb{R}^3$ разрезано на параллелепипеды $\Pi_\varepsilon^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x_i - x_i^\alpha| \leqslant (\theta_i\varepsilon)/2, i = 1,2,3\}$ с центрами в точках x^α и сторонами длиной $\theta_i\varepsilon$, ориентированными по координатным осям. В каждом параллелепипеде, принадлежащем области Ω, находится множество G_ε^α, являющееся гомотетическим сжатием и поворотом фиксированного тела $G \in \mathbb{R}^3$ диаметром единица, с центром масс в начале координат и гладкой границей ∂G. Диаметры множеств G_ε^α $d_\varepsilon^\alpha = d(x^\alpha)\varepsilon$, центры масс находятся в точках $x^\alpha + a(x^\alpha)\varepsilon$, а ориентации задаются операторами вращения $P(x^\alpha)$ так, что

$$G_\varepsilon^\alpha = \left\{x \in \Pi_\varepsilon^\alpha \colon P^{-1}(x^\alpha)\frac{x - x^\alpha - a(x^\alpha)\varepsilon}{d(x^\alpha)\varepsilon} \in G\right\}.$$

Будем предполагать, что функция $d(y)$, вектор-функция $a(y)$ и матрица $P(y)$ непрерывно дифференцируемы и выполняются неравенства

$$\max_{y\in\Omega}(|d(y)| + |a(y)|) < \min_i \frac{\theta_i(1-2\delta)}{2}, \qquad \delta > 0.$$

Такая структура композитной среды называется локально периодической.

Введем обозначения

$$\Pi = \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 \colon |\xi_i| < \frac{\theta_i}{2},\ i = 1,2,3\right\},$$

$$G^y = \left\{\xi \in \Pi \colon P^{-1}(y)\frac{\xi - a(y)}{d(y)} \in G,\ y \in \Omega\right\}.$$

Рассмотрим в $\Pi \setminus G^y$ следующую краевую задачу ("ячеечная" задача):

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{iklm}\gamma_{lm}[\widetilde{w}^{np}])e^k = 0, \qquad x \in \Pi \setminus G^y, \tag{9}$$

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm}\gamma_{lm}[\widetilde{w}^{np}]\nu_i e^k = \widetilde{p}\nu, \qquad x \in \partial G^y, \tag{10}$$

$\widetilde{w}^{np} - \phi^{np}$, $T_s[w^{np} - \phi^{np}]$ — Π-периодические (принимают одинаковые значения на противоположных гранях [5]).

Здесь $\widetilde{p} = \mathrm{const}$, а вектор-функция $\phi^{np}(x)$ определена равенством $\phi^{np} = (x_n e^p + x_p e^n)/2$.

Существует единственное решение этой задачи.

С помощью решения задачи (9), (10) определим тензор $\{\widetilde{A}_{npqr}(y)\}$ по формуле:

$$\widetilde{A}_{npqr}(y) = \int\limits_{\Pi\setminus G^y} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm}\gamma_{ik}[\widetilde{w}^{np}]\gamma_{lm}[\widetilde{w}^{qr}]\,dx. \tag{11}$$

Он обладает симметрией $\widetilde{A}_{iklm} = \widetilde{A}_{kilm} = \widetilde{A}_{lmik} = \widetilde{A}_{ikml}$ и положительно определен.

Чтобы сформулировать основной результат работы, введем вектор-функцию смещение среды

$$\widehat{u}_\varepsilon(x,t) = u_\varepsilon(x,t)\chi_\varepsilon(x) + (1-\chi_\varepsilon(x))\int\limits_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

где $\chi_\varepsilon(x)$ — характеристическая функция области Ω_ε.

Теорема 2. *Пусть начальные скорости задачи* (1)–(8) *сходятся к вектор-функциям* $U^0 \in L_2(\Omega)$, $U^1 \in L_2(\Omega)$ *и* $V^1 \in L_2(\Omega)$ *так, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |U_\varepsilon^1 - U^1|^2 dx = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |U_\varepsilon^0 - U^0|^2 dx = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G_\varepsilon} |V_\varepsilon^1 - V^1|^2 dx = 0.$$

Тогда вектор-функция смещения $\widehat{u}_\varepsilon(x,t)$ (12) *сходится в* $L_2(\Omega_T)$ ($\Omega_T = \Omega\times[0,T]$) *к вектор-функции* $u(x,t)$*, являющейся решением следующей начально-краевой задачи:*

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_n}(A_{npqr}(x)\gamma_{qr}[u(x,t)])e^p = 0, \tag{13}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x\in\partial\Omega, \tag{14}$$

$$u(x,0) = U^0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = V(x), \tag{15}$$

где $\rho = \rho(x) = \rho_f\dfrac{|G^x|}{|\Pi|} + \rho_s\dfrac{|\Pi\setminus G^x|}{|\Pi|}$, $V = \dfrac{\rho_f}{\rho}\dfrac{|G^x|}{|\Pi|}V^1 + \dfrac{\rho_s}{\rho}\dfrac{|\Pi\setminus G^x|}{|\Pi|}U^1$, *а коэффициенты* $A_{npqr}(x)$ *определяются формулами* (11).

Схема доказательства аналогична доказательству, проведенному в [6], где $\mu = \mathrm{const}$ и $U_\varepsilon^0 = 0$. При $U_\varepsilon^0 \neq 0$ и стремлении вязкости к нулю возникают дополнительные трудности, связанные, например, с вырождением уравнения (2). Последнее преодолевается с помощью неравенства типа Корна для пористых упругих сред с пустотами [7].

1. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 312 с.
2. *Sanchez-Hubert J.* Asymptotic study of the macroscopic behaviour of solid liquid mixture // Math. Meth. Appl. Sci. – 1980. – No 2. – P. 1–11.
3. *Gilbert R. P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed // J. Nonlinear Anal. – 2000. – **40**. – P. 185–212.
4. *Мейерманов А. М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 3. – С. 646–667.
5. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. – Москва: Мир, 1984. – 472 с.
6. *Гончаренко М. В., Хруслов Е. Я.* Усредненная модель колебаний увлажненной упругой среды // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 10. – С. 1309–1329.
7. *Берлянд Л. В.* О колебаниях упругого тела с большим числом мелких пустот // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 2. – С. 3–5.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 15.07.2010

M. V. Goncharenko, N. K. Radyakin

An averaged model of oscillations of the elastic medium with a lot of small caverns filled with a low-viscosity incompressible fluid

The initial boundary-value problem of nonstationary vibrations of the elastic medium with a great number of small caverns filled by a viscous incompressible fluid is considered. The asymptotic behavior of the solution is studied as the diameters of caverns and the density of the fluid tend to zero. The number of caverns tends to infinity. It is assumed that the caverns have a volume location. The homogenized equation that describes the first term of the asymptotics is obtained. This equation is a model of wave propagation in media such as wet soil, rocks, and biological tissues.