УДК 517.95+511.7

В. С. Ільків, І. Я. Савка

Задача з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними і сталими алгебрично залежними коефіцієнтами

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

Встановлено умови однозначної розв'язності задачі з нелокальними двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними та сталими алгебрично залежними коефіцієнтами в термінах діофантових властивостей дискримінанта характеристичного рівняння на алгебричному многовиді. Досліджено властивість нормальності многовиду та визначено показник нормальності.

Нелокальні задачі для рівнянь із частинними похідними є некоректними [1], а їх розв'язність є нестійкою стосовно як завгодно малих змін коефіцієнтів задачі. У випадку циліндричної області, що є декартовим добутком відрізка на тор, це пов'язано з проблемою оцінювання знизу малих знаменників [2, 3], які виникають при побудові формального розв'язку цих задач. Для розв'язання проблеми малих знаменників застосовується метричний підхід, який полягає у встановленні розв'язності задачі для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із деяких коефіцієнтів задачі. При цьому раніше вважалося, що всі компоненти цих векторів незалежно змінюються в деякій наперед заданій області. Якщо ж компоненти залежні, то отримані результати не можна безпосередньо використати, оскільки метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що забезпечують розв'язність задачі, не розрізняють множини нульової міри, якими є області зміни залежних параметрів.

Раніше нами було розглянуто нелокальну двоточкову задачу для рівнянь з частинними похідними та лінійно залежними коефіцієнтами [4]. У даній роботі досліджується задача зі сталими алгебрично залежними коефіцієнтами. Для формулювання результатів введено поняття δ-нормальності алгебричного многовиду та визначено його показник нормальності δ.

1. Формулювання задачі. Надалі використовуємо такі позначення: $x \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $(k,x) = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$, $\widetilde{k} = (1 + (k,k))^{1/2}$, $s = (s_1,\ldots,s_p) \in \mathbb{Z}^p_+$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$, $\partial_t^n = \partial^n/\partial t^n$, $\partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1}\cdots\partial_{x_p}^{s_p}$; $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор, $\mathcal{D} = [0,T]\times\Omega_p$, $T > 0$.

Введемо такі простори 2π-періодичних за змінною x функцій: $\mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, — простір Соболєва функцій, отриманий поповненням множини тригонометричних многочленів $\varphi(x) = \sum\limits_k \varphi_k e^{(ik,x)}$ за нормою $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_q(\Omega_p)}$, яка породжується скалярним добутком $(\varphi,\psi)_{\mathbf{H}_q(\Omega_p)} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q}\varphi_k\overline{\psi}_k$; $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\partial_t^j u(t,\cdot)$, $j = 0,1,\ldots,n$, належать простору $\mathbf{H}_{q-j}(\Omega_p)$ та неперервні на відрізку $[0,T]$ у цьому просторі; норма в просторі $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$ визначається формулою $\|u\|^2_{\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})} = \sum\limits_{j=0}^{n} \max\limits_{t\in[0,T]} \|\partial_t^j u(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{H}_{q-j}(\Omega_p)}$.

В області $\mathcal{D}$ змінних (t, x) розглянемо задачу

$$L(\partial_t, \partial_x)u \equiv \partial_t^n u + a_1 \partial_{x_1}^n u + \cdots + a_p \partial_{x_p}^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(\partial_x)\partial_t^{n-j} u = 0, \tag{1}$$

$$L_j u \equiv \partial_t^{j-1} u|_{t=0} - \mu \partial_t^{j-1} u|_{t=T} = \varphi_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

де φ_j — довільні задані функції з просторів, які належать шкалі $\{\mathbf{H}_q(\Omega_p)\}_{q \in \mathbb{R}}$, $u = u(t, x)$ — шукана функція, $A_j(\partial_x) = \sum\limits_{|s| \leqslant j} A_s^j \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$, $j = 1, \ldots, n$.

Коефіцієнти $a_1, \ldots, a_p$, A_s^j та μ задачі (1), (2) є дійсними числами, причому вважаємо, що коефіцієнти A_s^j є фіксованими, а коефіцієнти $a_1, \ldots, a_p$, μ — нефіксованими.

Коефіцієнт μ і вектор коефіцієнтів $a = (a_1, \ldots, a_p)$ є незалежними, але на компоненти $a_1, \ldots, a_p$ вектора a накладена умова алгебричної залежності

$$R(a) \equiv \sum_{|s| \leqslant d} \alpha_s a_1^{s_1} \cdots a_p^{s_p} = 0. \tag{3}$$

Многочлен R з дійсними коефіцієнтами α_s має степінь $d \geqslant 2$. Рівність (3) задає алгебричний многовид у просторі $\mathbb{R}^p$ векторів a.

Раніше [2, 3] для незалежних коефіцієнтів $a_1, \ldots, a_p$ встановлено розв'язність задачі (1), (2) для майже всіх векторів (a, μ) із множини даних. Випадок $d = 1$ розглянуто в роботі [1], в якій встановлено умови розв'язності задачі (1)–(3) у просторах Соболєва для майже всіх μ та для майже всіх точок a лінійного многовиду.

Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо функцію $u \in \mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$, яка задовольняє рівняння (1) у просторі $\mathbf{H}_{q-n}^0(\mathcal{D})$ і умову $L_j u = \varphi_j$ у просторі $\mathbf{H}_{q-1+j}(\Omega)$, $j = 1, \ldots, n$.

2. Побудова формального розв'язку. Умови єдиності. Розв'язок u задачі (1), (2) має вигляд ряду Фур'є

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik, x), \tag{4}$$

де функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком двоточкової нелокальної задачі для звичайних диференціальних рівнянь:

$$L\left(\frac{d}{dt}, ik\right) u_k(t) = 0, \tag{5}$$

$$L_j u_k(t) = \varphi_{jk}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Умови єдиності розв'язку u задачі (1), (2) випливають з умов єдиності розв'язку $u_k(t)$ задачі (5), (6) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$.

У позначеннях $\mathbf{v}_k(t) = \mathrm{col}\left(u_k(t), \dfrac{du_k(t)}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}u_k(t)}{dt^{n-1}}\right)$, $\boldsymbol{\varphi}_k = \mathrm{col}(\varphi_{1k}, \ldots, \varphi_{nk})$,

$$\mathbf{A}_k(a) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E}_{n-1} \\ \mathbf{A}_{nk}(a) & (-A_{n-1}(ik) \cdots -A_1(ik)) \end{bmatrix},$$

де $\mathbf{A}_{nk}(a) = -i^n \sum\limits_{j=1}^{p} a_j k_j - A_n(ik)$, $\mathbf{E}_m$ — одинична матриця порядку m, задача (5), (6) еквівалентна нелокальній задачі на відрізку $[0,T]$ для нормальної системи першого порядку

$$\frac{d\mathbf{v}_k(t)}{dt} = \mathbf{A}_k(a)\mathbf{v}_k(t), \tag{7}$$

$$\mathbf{v}_k(0) - \mu\mathbf{v}_k(T) = \boldsymbol{\varphi_k}. \tag{8}$$

Загальний розв'язок рівняння (7) зображається формулою $\mathbf{v}_k(t) = e^{\mathbf{A}_k(a)t}C(k)$, де $C(k)$ — довільний сталий вектор-стовпець. З умови (8) дістанемо лінійну систему алгебричних рівнянь

$$[\mathbf{E}_n - \mu e^{\mathbf{A}_k(a)T}]C(k) = \boldsymbol{\varphi_k} \tag{9}$$

для визначення невідомого вектора $C(k)$. Задача (7), (8) має єдиний розв'язок $\mathbf{v}_k(t)$ тоді й тільки тоді, коли є невиродженою матриця $\mathbf{E}_n - \mu e^{\mathbf{A}_k(a)T}$ системи (9). Звідси випливає таке твердження про єдиність розв'язку задачі (1), (2):

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку u задачі* (1), (2) *у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad \det[\mathbf{E}_n - \mu e^{\mathbf{A}_k(a)T}] \neq 0. \tag{10}$$

Умова (10) означає, що число $1/\mu$ не є власним значенням матриці $e^{\mathbf{A}_k(a)T}$ для жодного вектора $k \in \mathbb{Z}^p$. Якщо розв'язок $\mathbf{v}_k(t)$ задачі (7), (8) — єдиний, то він зображається формулою

$$\mathbf{v}_k(t) = e^{\mathbf{A}_k(a)t}[E_n - \mu e^{\mathbf{A}_k(a)T}]^{-1}\boldsymbol{\varphi_k}. \tag{11}$$

Отже, формальний розв'язок u задачі (1), (2) є рядом (4), в якому функція $u_k(t)$ є першою координатою вектора $\mathbf{v}_k(t)$ із формули (11).

Для доведення існування розв'язку задачі (1), (2) маємо оцінити функцію від матриці $\mathbf{A}_k(a)$ у формулі (11). Позначимо через $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \ldots, \lambda_{nk}$ власні значення матриці $\mathbf{A}_k(a)$, які також є коренями характеристичного рівняння

$$L(\lambda, ik) \equiv \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} A_j(ik)\lambda^{n-j} + i^n \sum_{j=1}^{n} a_j k_j^n = 0, \tag{12}$$

що відповідає диференціальному рівнянню (5). Тоді числа $(1 - \mu e^{\lambda_{jk}T})^{-1}$, де $j = 1, \ldots, n$, є власними значеннями матриці $[E_n - \mu e^{\mathbf{A}_k(a)T}]^{-1}$, а числа $e^{\lambda_{jk}t}(1 - \mu e^{\lambda_{jk}T})^{-1}$ — власними числами матриці $e^{\mathbf{A}_k(a)t}[E_n - \mu e^{\mathbf{A}_k(a)T}]^{-1}$.

Для збіжності функціонального ряду (4) у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ достатньо оцінити знизу знаменники $1 - \mu e^{\lambda_{jk}T}$, а також різниці $\lambda_{lk} - \lambda_{jk}$, які присутні в зображенні [5] матричної функції $e^{\mathbf{A}_k(a)t}[E_n - \mu e^{\mathbf{A}_k(a)T}]^{-1}$.

У випадку незалежних компонент $a_1, \ldots, a_p$ вектора a встановлено твердження про те, що рівняння (12) має прості корені для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^p$) векторів a, усіх (за винятком скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ (див. [6]). Дане твердження випливає з відокремленості від нуля дискримінанта многочлена $L(\lambda, ik)$ степеневою функцією.

Для встановлення подібних умов відокремленості від нуля дискримінанта многочлена $L(\lambda, ik)$ у випадку алгебрично залежних коефіцієнтів $a_1, \ldots, a_p$, з яких випливає простота всіх коренів рівняння (12), вводимо поняття δ-нормальності (див. [7]) алгебричного многовиду (3) щодо дискримінанта многочлена $L(\lambda, ik)$.

3. $\boldsymbol{\delta}$-нормальність алгебричного многовиду. Нехай точка $a^0 \in \mathbb{R}^p$ задовольняє рівняння $R(a^0) = 0$ і є некритичною точкою поліноміальної функції $R(a)$, тобто $\nabla R|_{a=a^0} \neq 0$, де ∇ — градієнт. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $\partial_{a_p} R(a)|_{a=a^0} \neq 0$.

Таким чином, в околі U некритичної точки a^0 функції R рівняння $R(a) = 0$ задає $(p-1)$-вимірну поверхню $M = \{a \in U \colon R(a) = 0\}$ у просторі $\mathbb{R}^p$. Поверхня M є околом точки a^0 алгебричного многовиду, яка визначається як перетин околу U точки a^0 в просторі $\mathbb{R}^p$ і алгебричного многовиду $R(a) = 0$.

На підставі теореми про неявну функцію алгебричний многовид $R(a) = 0$ в деякому замкненому околі U точки a^0 має явний вигляд $a_p = f(\overline{a})$, де $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_{p-1})$, функція $f(\overline{a})$ визначена та достатньо гладка в околі $U_p = \pi_{a_p}(U)$ точки $\overline{a}^0 \in \mathbb{R}^{p-1}$, причому $a_p^0 = f(\overline{a}^0)$, $\pi_{a_p}(U)$ — проекція U вздовж осі a_p.

Введемо поняття δ-нормальності поверхні (алгебричного многовиду) M щодо дискримінанта $\mathrm{D}(a, k)$ характеристичного многочлена $L(\lambda, ik)$.

Означення 1. Вектор a з $\mathbb{R}^p$ називається δ-нормальним, якщо для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\mathrm{D}(a, k)| \geqslant \widetilde{k}^{-\delta}, \qquad \delta \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Означення 2. Поверхня M називається δ-нормальною, якщо майже всюди на M виконується умова δ-нормальності. Число δ називається показником нормальності поверхні M.

Зауваження. Деяка властивість виконана майже всюди на поверхні M, якщо вона виконана для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{p-1}$) точок $\overline{a}$ в околі U_p.

Позначимо через $\theta(q, m)$ мультиіндекс із множини $\mathbb{Z}_+^p$, що задається формулою

$$\theta(q, m) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{q-1}, d-m, 0, \ldots, 0, m), \qquad q = 1, \ldots, p-1, \qquad m = 0, 1, \ldots, d.$$

Теорема 2. *Нехай існують такі сталі $C_1 > 0$ та $\psi \in \mathbb{R}$, що для всіх $(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{\eta \neq 0\}$ при $q = 1, \ldots, p-1$ виконуються нерівності*

$$\left| \sum_{m=0}^{d} (-1)^m \alpha_{\theta(q,m)} \xi^m \eta^{d-m} \right| \geqslant C_1(|\xi| + |\eta|)^{\psi}. \tag{14}$$

Тоді поверхня M є δ-нормальною при $\delta > (n-1)(n(d-\psi) + dp - n)$.

Доведення. Дискримінант $\mathrm{D}(a, k)$ є результантом [8, с. 17] многочлена $L(\lambda, ik)$ та його похідної $L'_\lambda(\lambda, ik)$, який можна зобразити за допомогою $L_{jk}(a)$ значень многочлена $L(\lambda, ik)$ на коренях $\mu_{1k}, \ldots, \mu_{n-1,k}$, його похідної $L'_\lambda(\lambda, ik)$ формулою

$$\mathrm{D}(a, k) = (-1)^{n(n-1)/2} n^n \prod_{j=1}^{n-1} L_{jk}(a), \tag{15}$$

де $L_{jk}(a) := L(\mu_{jk}, ik) = a_1(ik_1)^n + \cdots + a_p(ik_p)^n + l_{jk}$, $l_{jk} = \mu_{jk}^n + \sum\limits_{r=1}^{n} A_j(ik) \mu_{jk}^{n-r}$.

Для встановлення оцінки знизу (13) дискримінанта $\mathrm{D}(a,k)$ розглянемо його як функцію незалежних параметрів $a_1,\ldots,a_{p-1}$, попередньо виключивши з умови

$$R(a) \equiv \sum_{j=0}^{d}\left(\sum_{|\overline{s}|\leqslant d-j}\alpha_{\overline{s},j}\overline{a}^{\overline{s}}\right)a_p^j = 0,$$

де $\overline{s}=(s_1,\ldots,s_{p-1})$, $\overline{a}=(a_1,\ldots,a_{p-1})$, алгебрично залежний параметр a_p.

Для цього використаємо техніку виключення [8] за допомогою результанта $\operatorname*{res}_{a_p}(\mathrm{D},R)$ многочленів $\mathrm{D}(a,k)$ і $R(a)$ за змінною a_p. Використавши властивості результанта, на основі формули (15) отримаємо таке зображення для результанта $\operatorname*{res}_{a_p}(\mathrm{D},R)$:

$$\operatorname*{res}_{a_p}(\mathrm{D},R) = (-1)^{n(n-1)d/2}n^{nd}\prod_{j=1}^{n-1}R_{jk}(\overline{a}), \tag{16}$$

де $R_{jk}(\overline{a}) = \operatorname*{res}_{a_p}(L_{jk}(a),R(a))$. З іншого боку, результант $\operatorname*{res}_{a_p}(\mathrm{D},R)$ можна зобразити формулою

$$\operatorname*{res}_{a_p}(\mathrm{D},R) = \alpha_{0,d}^{n-1}\prod_{j=1}^{d}\mathrm{D}(\overline{a},a_p^j,k), \tag{17}$$

де $a_p^1,\ldots,a_p^d$ — корені рівняння $R(\overline{a},a_p)=0$ за змінною a_p.

Позначимо $a_p^1 = a_p^1(\overline{a})$ ту вітку, яка збігається з функцією f, тобто $a_p^1(\overline{a}) \equiv f(\overline{a})$ в околі U_p, тоді $\mathrm{D}(a,k) = \mathrm{D}(\overline{a},f(\overline{a}),k)$ для точок $a\in M$, де $\overline{a}=\pi_{a_p}(a)$.

Оскільки з формули (15) випливає нерівність $|\mathrm{D}(a,k)| \leqslant C_2\widetilde{k}^{n(n-1)}$ для будь-яких $a\in M$ та $k\in\mathbb{Z}^p$, де стала C_2 не залежить від k, то з рівностей (16) та (17) маємо

$$|\mathrm{D}(\overline{a},f(\overline{a}),k)| \geqslant \frac{\widetilde{k}^{-n(n-1)(d-1)}|\operatorname{res}_{a_p}(\mathrm{D},R)|}{|\alpha_{0,d}|^{(n-1)}C_2^{d-1}} \geqslant \frac{n^{nd}\widetilde{k}^{-n(n-1)(d-1)}}{|\alpha_{0,d}|^{(n-1)}C_2^{d-1}}\prod_{j=1}^{n-1}|R_{jk}(\overline{a})|. \tag{18}$$

Оцінимо знизу кожну з функцій $R_{jk}(\overline{a})$, $j=1,\ldots,n-1$, на множині U_p за допомогою метричного підходу. Для цього нам знадобиться допоміжна лема про оцінку міри виняткової множини для поліномів.

Лема. *Нехай $F(y)\equiv F(y_1,\ldots,y_m)$ — поліном степеня d з комплексними коефіцієнтами, визначений в обмеженій однозв'язній області $G\subset\mathbb{R}^m$. Якщо*

$$|\nabla^d F| \equiv |\partial_{y_1}^d F| + \cdots + |\partial_{y_m}^d F| \neq 0,$$

то

$$\operatorname*{mes}_{\mathbb{R}^m}\{y\in G\colon |F(y)|<\varepsilon\} \leqslant c\sqrt[d]{\frac{\varepsilon}{|\nabla^d F|}},$$

де додатна стала c залежить від m, d та області G.

Доведення. Значення виразу $|\nabla^d F|$ не залежить від y. Нехай $|\partial_{y_1}^d F| = \max\limits_{i=1,\ldots,m}|\partial_{y_i}^d F|$, тоді $|\nabla^d F| \geqslant |\partial_{y_1}^d F| \geqslant |\nabla^d F|/m$.

Зобразимо поліном $F(y)$ у вигляді

$$F(y) = \frac{\partial^d_{y_1} F(y)}{d!} \prod_{i=1}^{d} (y_1 - \lambda_i(y_2, \ldots, y_m)),$$

де $\lambda_i(y_2, \ldots, y_p)$, $i = 1, \ldots, d$, — корені рівняння $F(y) = 0$ за змінною y_1, звідки

$$A := \operatorname*{mes}_{\mathbb{R}^m} \{y \in G \colon |F(y)| < \varepsilon\} = \left\{ y \in G \colon \prod_{i=1}^{d} \bigl| y_i - \lambda_i(y_2, \ldots, y_m \bigr| < \frac{\varepsilon d!}{|\partial^d_{y_1} F|} \right\}.$$

Легко бачити, що хоча б для одного індекса j буде виконуватися нерівність

$$\bigl| y_1 - \lambda_j(y_2, \ldots, y_m \bigr| < \left(\frac{\varepsilon d!}{|\partial^d_{y_1} F|} \right)^{1/d}, \qquad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Зафіксуємо змінні $(y_2, \ldots, y_m) = (y_2^0, \ldots, y_m^0)$ і введемо множини

$$A(y_2^0, \ldots, y_m^0) = \left\{ y_1 \in G_1 \colon \bigl| y_1 - \lambda_1(y_2^0, \ldots, y_m^0) \bigr| \cdots \bigl| y_1 - \lambda_d(y_2^0, \ldots, y_m^0) \bigr| < \frac{\varepsilon d!}{|\partial^d_{y_1} F|} \right\},$$

$$A_i(y_2^0, \ldots, y_m^0) = \left\{ y_1 \in G_1 \colon \bigl| y_1 - \lambda_i(y_2^0, \ldots, y_m^0) \bigr| < \left(\frac{\varepsilon d!}{|\partial^d_{y_1} F|} \right)^{1/d} \right\}, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

де G_1 — множина таких точок y_1 із множини G, які містяться на перетині гіперплощин $y_2 = y_2^0, \ldots, y_m = y_m^0$. Оскільки для міри множини $A_i(y_2^0, \ldots, y_m^0)$ справедлива оцінка

$$\operatorname*{mes}_{\mathbb{R}} A_i(y_2^0, \ldots, y_m^0) \leqslant 2 \left(\frac{\varepsilon d!}{|\partial^d_{y_1} F|} \right)^{1/d}, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

то із включень $A(y_2^0, \ldots, y_m^0) \subset A_j(y_2^0, \ldots, y_m^0) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{d} A_i(y_2^0, \ldots, y_m^0)$ для деякого j випливає нерівність $\operatorname*{mes}\limits_{\mathbb{R}} A(y_2^0, \ldots, y_m^0) \leqslant \bigcup\limits_{i=1}^{d} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} A_i(y_2^0, \ldots, y_m^0) \leqslant 2d(\varepsilon d!/|\partial^d_{y_1} F|)^{1/d}$.

Інтегруючи останню нерівність за множиною $\widetilde{G} = \pi_{y_1}(G)$ ($\widetilde{G}$ — проекція G вздовж осі y_1), за теоремою Фубіні отримуємо $\operatorname*{mes}\limits_{\mathbb{R}^m} A = \int\limits_{\widetilde{G}} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} A(y_2^0, \ldots, y_m^0) dy_2^0 \cdots dy_m^0$, звідки випливає оцінка для міри множини A

$$\operatorname*{mes}_{\mathbb{R}^m} A \leqslant 2d \left| \int\limits_{\widetilde{G}} dy_2^0 \cdots dy_m^0 \right| \left(\frac{\varepsilon d!}{|\partial^d_{y_1} F|} \right)^{1/d} \leqslant 2d(d!m)^{1/d} \operatorname*{mes}_{\mathbb{R}^{m-1}} \widetilde{G} \left(\frac{\varepsilon}{|\nabla^d F|} \right)^{1/d},$$

тобто $\operatorname*{mes}\limits_{\mathbb{R}^p} A \leqslant c(\varepsilon/|\nabla^d F|)^{1/d}$, де $c = 2d(d!m)^{1/d} \operatorname*{mes}\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \widetilde{G}$, що і треба було довести.

Продовжимо доведення теореми 2.

Введемо для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ множини $N_k^1, \ldots, N_k^{n-1}$ за формулою $N_k^j = \{\overline{a} \in U_p \colon |R_{jk}(\overline{a})| < C_3 \widetilde{k}^{n(d-1)-\delta/(n-1)}\}$, де δ — показник нормальності,

$C_3^{n-1} = |\alpha_{0,d}|^{n-1} C_2^{d-1}/n^{nd}$, а також множини $N^1, \ldots, N^{n-1}$, де N^j — множина точок $\overline{a} \in \in U_p$, для яких безліч разів (стосовно вектора k) виконується нерівність $|R_{jk}(\overline{a})| < < C_3 \widetilde{k}^{n(d-1)-\delta/(n-1)}$.

Оскільки $R_{jk}(\overline{a}) = i^{nd} \sum\limits_{m=0}^{d} (-1)^m k_p^{n(d-m)} \Bigl(\sum\limits_{|\overline{s}| \leqslant d-m} \alpha_{\overline{s},m} \overline{a}^{\overline{s}}\Bigr)(a_1 k_1^n + \cdots + a_{p-1} k_{p-1}^n + i^{-n} l_{jk})^m$, то

$$\partial_{a_q}^d R_{jk}(\overline{a}) = d! \sum_{m=0}^{d} (-1)^m \alpha_{\theta(q,m)} k_q^{nm} k_p^{n(d-m)}, \qquad q = 1, \ldots, p-1.$$

З умов (14) теореми для вектора $k \neq 0$ випливає оцінка $|\partial_{a_q}^d R_{jk}(\overline{a})| \geqslant C_1 d! (|k_q^n| + |k_p^n|)^\psi$, $q = 1, \ldots, p-1$, звідки

$$|\nabla^d R_{jk}(\overline{a})| = \sum_{q=1}^{p-1} |\partial_{a_q}^d R_{jk}(\overline{a})| \geqslant C_4 \widetilde{k}^{n\psi}, \tag{19}$$

де C_4 — деяка додатна стала, що не залежить від k.

Враховуючи нерівність (19), при фіксованому k, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, застосуємо лему до полінома $R_{jk}(\overline{a})$ для оцінки зверху міри множини N_k^j. У результаті маємо

$$\operatorname*{mes}_{\mathbb{R}^{d-1}} N_k^j \leqslant C_5 \widetilde{k}^{\frac{n(d-1-\psi)}{d} - \frac{\delta}{d(n-1)}}, \tag{20}$$

де C_5 — незалежна від k додатна стала.

Оскільки $\delta > (n-1)(d(p+n) - n(1+\psi))$, то ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \operatorname{mes} N_k^j$ є збіжним і на підставі леми Бореля–Кантеллі маємо, що множина точок $\overline{a} \in U_p$, які потрапляють у нескінченну кількість множин N_k^j, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, дорівнює нулеві, тобто $\operatorname*{mes}_{\mathbb{R}^{p-1}} N^j = 0$ для $j = 1, \ldots, n-1$. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{p-1}$) векторів $\overline{a} \in U_p$ нерівності

$$|R_{jk}(\overline{a})| \geqslant C_3 \widetilde{k}^{n(d-1)-\delta/(n-1)}, \qquad j = 1, \ldots, n-1, \tag{21}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

З нерівностей (18) і (21) випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{p-1}$) векторів $\overline{a} \in U_p$ нерівність $|\mathrm{D}(\overline{a}, f(\overline{a}), k)| \geqslant \widetilde{k}^{-\delta}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, тобто поверхня M є δ-нормальною. Теорему доведено.

4. Умови існування єдиного розв'язку. Надалі будемо припускати, що виконуються умови (10) та (14). Тоді існує константа $K_a > 0$ (залежна від a, $a \in M$) така, що для $\widetilde{k} > K_a$ рівняння $L(\lambda, ik)$ має різні корені $\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{nk}$ майже всюди на поверхні M, причому $\mu e^{\lambda_{lk} T} \neq 1$, $l = 1, \ldots, n$. Звідси випливає, що при $\widetilde{k} > K_a$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (5), (6) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{l,j=1}^{n} \frac{(-1)^{n+j} S_{n-j}[\lambda_{lk}] e^{\lambda_{lk} t}}{(1 - \mu e^{\lambda_{lk} T}) L'_\lambda(\lambda_{lk}, ik)} \varphi_{jk}, \tag{22}$$

де $L'_\lambda(\lambda_{lk}, ik) = \prod\limits_{i=1, i \neq l}^{n} (\lambda_{lk} - \lambda_{ik})$, $S_0[\lambda_{lk}] = 1$, $S_q[\lambda_{lk}]$ — сума всіх можливих добутків чисел $\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{l-1,k}, \lambda_{l+1,k}, \ldots, \lambda_{nk}$, узятих по q штук в кожному добутку.

Для доведення належності розв'язку $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{i(k,x)}$ до простору $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ достатньо для кожного вектора $k\in\mathbb{Z}^p$ оцінити зверху функції $u_k(t)$ та їх похідні до n-го порядку включно. Величини $1-\mu e^{\lambda_{lk}T}$, $L'_\lambda(\lambda_{lk}), ik)$ у формулі (22) є знаменниками, які, взагалі, можуть як завгодно наближатися при $\widetilde{k}\to\infty$ до нуля. Тому такі вирази називають малими знаменниками і в оцінюванні знизу цих знаменників полягає *проблема малих знаменників* для задачі (1), (2).

Позначимо

$$C_6 = 1+\sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{l=1,\ldots,n}\left\{\frac{|\lambda_{lk}|}{\widetilde{k}}\right\},\qquad C_7=\sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{\substack{q=0,\ldots,n,\\ l=1,\ldots,n}}\frac{|S_q[\lambda_l(a,k)]|}{\widetilde{k}^q},$$

тоді

$$(\forall\, k\in\mathbb{Z}^p)\qquad |\lambda_{jk}|\leqslant C_6\widetilde{k},\qquad |S_{n-j}[\lambda_{lk}]|\leqslant C_7\widetilde{k}^{n-j},\qquad j=1,\ldots,n. \tag{23}$$

На підставі δ-нормальності поверхні M, першої з нерівностей (23) та із зображення $\mathrm{D}(a,k)=\prod\limits_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant n}(\lambda_{\alpha k}-\lambda_{\beta k})^2$ випливає, що оцінка

$$|L'_\lambda(\lambda_{lk},ik)|\geqslant\frac{|\mathrm{D}(a,k)|^{1/2}}{(2C_6\widetilde{k})^{(n-1)(n-2)/2}}\geqslant C_8\widetilde{k}^{-\delta+(n-1)(n-2)/2}, \tag{24}$$

де $C_8=(2C_6)^{-(n-1)(n-2)/2}$, виконується майже всюди на поверхні M для $\widetilde{k}>K_a$.

Для оцінки знизу виразу $|1-\mu e^{\lambda_{lk}T}|$ зафіксуємо вектор $a\in M$ і розглянемо його як функцію від змінної μ на відрізку I.

Теорема 3. *Для довільних $0<\varepsilon<1$ і $\gamma>p$ існує така множина $\mathcal{B}_\varepsilon$, що $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\mathcal{B}_\varepsilon\leqslant\varepsilon$ і для всіх векторів $\mu\in I\setminus\mathcal{B}_\varepsilon$ та $k\in\mathbb{Z}^p$ виконуються оцінки*

$$|1-\mu e^{\lambda_{jk}T}|\geqslant C_9\varepsilon\widetilde{k}^{-\gamma}\max\{1,e^{\operatorname{Re}\lambda_{jk}T}\},\qquad j=1,\ldots,n, \tag{25}$$

де

$$C_9=\frac{1}{2}\max\left\{1,\frac{1}{2n|\mu|S},\frac{1}{2S}\right\},\qquad S=\sum_{\widetilde{k}>K_a}\widetilde{k}^{-\gamma}.$$

Доведення здійснюється за схемою п. 4.1 з роботи [4].

Зауважимо, що умова (10) виконується для майже всіх точок $(\mu,\overline{a})$ із множини $I\times U_p$.

Теорема 4. *Нехай a^0 — некритична точка алгебричного многовиду* (3), *для якого виконується умова* (14), *і нехай $\varphi_j\in\mathbf{H}_{q-j+\chi}(\Omega)$, $j=1,\ldots,n$, де $\chi\geqslant 1+p+(n-1)(n(d-\psi)+dp)/2$. Тоді для всіх векторів $\mu\in I\setminus\mathcal{B}_\varepsilon$, майже всюди на поверхні M, де $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\mathcal{B}_\varepsilon\leqslant\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, існує єдиний розв'язок и задачі* (1)–(3) *з простору $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$.*

Доведення. З формул (11), (22) та нерівностей (24), (25) випливає, що для $r=0,\ldots,n$ нерівність

$$\left|\frac{d^r u_k(t)}{dt^r}\right|\leqslant\begin{cases} C_{10}\sum\limits_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|, & \widetilde{k}\leqslant K_a,\\[2ex] C_{11}\sum\limits_{j=1}^{n}\widetilde{k}^{r+n-j+\gamma+\frac{\delta+(n-1)(n-2)}{2}}|\varphi_{jk}|, & \widetilde{k}>K_a,\end{cases} \tag{26}$$

виконується для $\mu \in I \backslash \mathcal{B}_\varepsilon$, майже всюди на поверхні M, де $\gamma > p$, $\delta > (n-1)(n(d-\psi)+dp-n)$,

$$C_{10} = \max_{\widetilde{k}\leqslant K} \max_{\substack{t\in[0,T],\\ r=0,\ldots,n}} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{d^r}{dt^r} (e^{\mathbf{L}_k(a)t}[E_n - \mu e^{\mathbf{L}_k(a)T}]^{-1})_{1j} \right|, \qquad C_{11} = \frac{C_6^n C_7}{C_8 C_9 \varepsilon}.$$

Тоді з формули для норми в просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ та нерівностей (26) отримуємо оцінку для квадрата норми розв'язку

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2(q-r)} \sum_{r=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^r u_k(t)}{dt^r} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{12} \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{k}^{2(q+\gamma+\delta/2+n(n-1)/2+1-j)} |\varphi_{jk}|^2 = C_{12} \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}_{q-j+\chi}(\Omega)},$$

де $C_{12} = 2(n+1)\max\{C_{10}^2, C_{11}^2\}$. Теорему доведено.

Зауваження. Для існування розв'язку задачі (1)–(3) на праві частини нелокальних умов φ_j потрібно накладати більшу на число $(n-1)(n(d-\psi)+dp)/2$ гладкість порівняно з випадком незалежних коефіцієнтів. Це число залежить не тільки від порядку n рівняння (1) і кількості просторових змінних p, а й від чисел d та ψ, які характеризують алгебричний многовид коефіцієнтів.

1. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – Москва: Наука, 1980. – 208 с.
2. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
3. *Пташник Б. И., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 216 с.
4. *Ільків В. С., Савка І. Я.* Нелокальна двоточкова задача для рівнянь із частинними похідними та лінійно залежними коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 48–58.
5. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624–1650.
6. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
7. *Симотюк М. М.* Метричні оцінки дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій // Мат. вісн. НТШ. – 2006. – **3**. – С. 149–156.
8. *Калинина Е. А., Утешев А. Ю.* Теория исключения: Учеб. пособие. – Ст.-Петербург: НИИ химии СПбГУ, 2002. – 72 с.
9. *Ильків В. С.* Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 15–19.

Національний університет "Львівська політехніка"
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 13.07.2010

V. S. Il'kiv, I. Ya. Savka

A problem with nonlocal conditions for partial differential equations with constant algebraically dependent coefficients

We established conditions for the unique solvability of a problem with nonlocal two-point boundary conditions for partial differential equations with constant algebraically dependent coefficients in terms of the Diophantine properties of the discriminant of the characteristic polynomial on an algebraic manifold. The property of normality of the manifold is investigated, and the index of normality is determined.