УДК 517.9;947.946

М. О. Старчак, М. М. Притула

Повна інтегровність нелінійної гідродинамічної системи типу Кортевега–де Фріза

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Досліджено нелінійну гідродинамічну систему типу Кортевега–де Фріза. Для цієї системи доведено існування нескінченної ієрархії функціонально незалежних та інволютивних законів збереження, знайдено пару сумісних імплектичних операторів, яка дозволяє записати систему в бігамільтоновому вигляді. Грунтуючись на градієнтно-голономному алгоритмі, знайдено явний вигляд зображення Лакса.

Зростання інтересу до вивчення нелінійних явищ і процесів, які виникають у задачах сучасного природознавства, спричинене систематичним використанням найновіших досягнень у сучасних розділах математики. Дослідження у цьому напрямку за останнє тридцятиріччя широко розвинуті [1–15]. Зокрема, особливо ефективним методом одержання явних (часткових) розв'язків нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах є метод скінченновимірних редукцій, основи якого були закладені в дослідженнях [1, 2, 5–10] та розвинуті в працях [12–15]. При застосуванні цього методу важливим є попередній симплектичний аналіз нелінійної динамічної системи, на основі якого можна встановити при певних додаткових умовах її повну інтегровність.

1. Постановка задачі. Нехай на нескінченновимірному гладкому періодичному многовиді $M \subset C_{2\pi}^{(\infty)}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^2)$ задана динамічна система типу Кортевега–де Фріза [8, 9, 11]

$$\left.\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} + uu_x - vv_x, \\ v_t &= -2v_{xxx} - uv_x \end{aligned}\right\} = K[w], \tag{1}$$

де вважаємо, що $w := (u,v)^\intercal \in M$, $t \in \mathbb{R}$ — еволюційний параметр, $\intercal$ — знак траспонування, $K[w]$ — гладке за Фреше функціонально-поліноміальне векторне поле $K\colon M \to T(M)$. Використовуючи градієнтно-голономний метод [12, 13], покажемо, що динамічна система (1) є узгодженим бігамільтоновим потоком на M і має стандартне зображення типу Лакса.

2. Закони збереження. На гладкому 2π-періодичному многовиді M для динамічної системи (1) знайдемо нескінченну ієрархію законів збереження. З цією метою розглянемо асимптотичні розв'язки рівняння Лакса [5]:

$$\frac{d\varphi}{dt} + K'^{*}\varphi = 0, \tag{2}$$

де $\varphi \in T^*(M)$, $'$ — штрих позначає похідну Фреше нелінійного локального функціонала $K\colon M \to T(M)$, а $*$ — спряження відносно стандартної білінійної форми. Оскільки оператор $K'^{*}\colon T^*(M) \to T^*(M)$ має, згідно з (1), вигляд

$$K'^{*} = \begin{pmatrix} -\partial^3 - u\partial & -v_x \\ v\partial & 2\partial^3 + \partial u \end{pmatrix},$$

то лінійне рівняння (2) допускає вектор-розв'язок $\varphi \in T^*(M)$ у вигляді

$$\varphi(x,t;\lambda) = (1, b(x,t;\lambda))^\intercal \exp\left[\lambda x + \lambda^3 t + \int\limits_{x_0}^{x} dx \sigma(x,t;\lambda)\right], \tag{3}$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексний параметр, $x_0 \in \mathbb{R}$ — довільна фіксована точка і

$$b(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} b_j[w]\lambda^{-j}, \qquad \sigma(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \sigma_j[w]\lambda^{-j}, \tag{4}$$

є асимпотичними розвиненнями при $|\lambda| \to \infty$. Підставляючи (4) в (3), з рівняння (2) отримуємо нескінченну систему рекурентних співвідношень [13, 15]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x_o}^{x} d\tau \sigma_j - 3\sigma_{j+2} - 3\sum_k \sigma_{j+1-k}\sigma_k - 3\sigma_{j+1,x} - 3\sum_k \sigma_{j-k}\sigma_{k,x} - \\
- \sigma_{j,xx} - \sum_{k,s}\sigma_{j-k}\sigma_{k-s}\sigma_s - u\delta_{j,-1} - u\sigma_j - v_x b_j = 0, \\
b_{j,t} + 9\sum_k b_{j+2-k}\sigma_k + 9\sum_{k,s} b_{j+1-k}\sigma_{k-s} + 9\sum_k b_{j+1-k}\sigma_{k,x} + 9\sum_{k,s} b_{j-k}\sigma_{k-s}\sigma_{s,x} + \\
+ 3\sum_k b_{j-k}\sigma_{k,xx} + 3\sum_{k,s,\ell} b_{j-k}\sigma_{k-s}\sigma_{s-\ell}\sigma_\ell + 2ub_{j+1} + 2u\sum_k b_{j-k}\sigma_k + \\
+ v_x\sum_k b_{j-k}b_k + v\delta_{j,-1} + v\sigma_j + 2b_{j,xxx} + 6b_{j+1,xx} + 6\sum_k b_{j-k,xx}\sigma_k + 6\sum_k b_{j-k,x}\sigma_{k,x} + \\
+ 6b_{j+2,x} + 12\sum_k b_{j+1-k,x}\sigma_k + 6\sum_{k,s} b_{j-k,x}\sigma_{k-s}\sigma_s + 3b_{j+3} + u_x b_j + ub_{j,x} = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

де j, k, s, $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Розв'язуючи послідовно систему рівнянь (5), знаходимо

$$\begin{aligned}
& b_0 = 0, \quad \sigma_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad \sigma_1 = -\frac{1}{3}u, \quad b_2 = -\frac{1}{3}v, \quad \sigma_2 = \frac{1}{3}u_x, \\
& b_3 = \frac{2}{3}v_x, \quad \sigma_3 = \frac{1}{18}v^2 - \frac{1}{18}u^2 - \frac{1}{3}u_{xx}, \quad b_4 = -\frac{2}{3}v_{xx}, \quad \sigma_4 = \frac{2}{9}uu_x - \frac{1}{9}vv_x + \frac{1}{3}u_{xxx}, \\
& b_5 = -\frac{2}{9}uv_x, \quad \sigma_5 = \frac{1}{54}uv^2 - \frac{1}{54}u^3 - \frac{5}{18}u_x^2 - \frac{1}{3}uu_{xx} + \frac{1}{9}vv_{xx} - \frac{1}{3}u_{xxxx}, \\
& b_6 = \frac{1}{27}v^3 + \frac{2}{3}u_x v_x + \frac{8}{9}uv_{xx} + \frac{4}{3}v_{5x}, \\
& \sigma_6 = u_x u_{xx} + \frac{4}{9}uu_{xxx} - \frac{1}{9}v_x v_{xx} - \frac{1}{9}vv_{xxx} + \frac{4}{27}u^2u_x - \frac{2}{27}uvv_x - \frac{1}{27}u_x v^2 + \frac{1}{3}u_{5x}, \\
& \sigma_7 = -\frac{1}{3}u_{6x} - \frac{5}{9}uu_{xxxx} + \frac{1}{9}vv_{xxxx} - \frac{14}{9}u_x u_{xxx} + \frac{2}{3}v_x v_{xxx} + \frac{1}{3}v_{xx}^2 - \frac{19}{18}u_{xx}^2 + \frac{1}{18}v^2u_{xx} - \\
& \quad - \frac{5}{18}u^2u_{xx} + \frac{2}{9}uv_x^2 - \frac{25}{54}uu_x^2 + \frac{5}{27}vv_x u_x + \frac{1}{9}uvv_{xx} + \frac{1}{108}u^2v^2 - \frac{5}{648}u^4 - \frac{1}{216}v^4, \ldots
\end{aligned} \tag{6}$$

і т. д. Локальним функціоналам σ_j, $j \in \mathbb{Z}_+$ (6) відповідають закони збереження $\gamma_j = \int_0^{2\pi} dx\sigma_j[u,v]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, перші чотири з яких мають вигляд

$$\begin{gathered}
\gamma_1 = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} udx, \quad \gamma_3 = \frac{1}{18}\int_0^{2\pi}(v^2-u^2)\,dx, \quad \gamma_5 = \frac{1}{54}\int_0^{2\pi}(uv^2-u^3+3u_x^2-6v_x^2)\,dx, \\
\gamma_7 = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{5}{648}u^4-\frac{1}{216}v^4+\frac{1}{108}u^2v^2+\frac{5}{54}uu_x^2-\frac{1}{18}u_{xx}^2-\frac{2}{9}v_{xx}^2+\frac{1}{9}uv_x^2+\frac{1}{54}v^2u_{xx}\right)dx.
\end{gathered} \tag{7}$$

Тут $\gamma_{2j} = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Закони збереження (7) за побудовою [3, 4] є функціонально незалежними. Випишемо, користуючись формулою

$$\operatorname{grad}\gamma_j = \left(\frac{\delta\gamma_j}{\delta u}, \frac{\delta\gamma_j}{\delta v}\right)^{\intercal},$$

$j \in \mathbb{Z}_+$, градієнти функціоналів (7):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\gamma_1 = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)^{\intercal}, \qquad \operatorname{grad}\gamma_3 = \frac{(-u,v)^{\intercal}}{9}, \\
&\operatorname{grad}\gamma_5 = \frac{(v^2-3u^2-6u_{xx}, 2uv+12v_{xx})^{\intercal}}{54}, \\
&\operatorname{grad}\gamma_7 = \left(-\frac{5}{162}u^3+\frac{1}{54}uv^2-\frac{5}{54}u_x^2+\frac{4}{27}v_x^2-\frac{5}{27}uu_{xx}+\frac{1}{27}vv_{xx}-\frac{1}{9}u_{xxxx},\right. \\
&\qquad \left.-\frac{1}{54}v^3+\frac{1}{54}u^2v-\frac{2}{9}u_xv_x-\frac{2}{9}uv_{xx}+\frac{1}{27}vu_{xx}-\frac{4}{9}v_{xxxx}\right)^{\intercal}.
\end{aligned} \tag{8}$$

3. Імплектичні оператори. Покажемо, що динамічна система (1) бігамільтонова, тобто справедливі рівності

$$w_t = -\vartheta\operatorname{grad}H_\vartheta = -\eta\operatorname{grad}H_\eta = K[w]. \tag{9}$$

Для знаходження імплектичних операторів $\{\vartheta, \eta\}\colon T^*(M) \to T(M)$ у явному вигляді скористаємося рівнянням нетеровості [3–5]

$$\mathcal{B}'K - \mathcal{B}K'^{*} - K'\mathcal{B} = 0, \qquad \mathcal{B} \in \{\vartheta, \eta\}, \tag{10}$$

та асимптотичним методом малого параметра [12, 13, 15]. Будемо вважати, що елемент $w = (u,v)^{\intercal} \in M$ має перший порядок малості відносно малого параметра $\varepsilon \to 0$; $u = \varepsilon u^{(1)}$, $v = \varepsilon v^{(1)}$. Тому зображуючи $\mathcal{B}$ і K за допомогою розвинень $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 + \varepsilon\mathcal{B}_1 + \cdots$, $K = \varepsilon K^{(1)} + \varepsilon^2 K^{(2)}$, де $K'^{(j+1)} = K'_j$, $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dt_0} + \varepsilon\dfrac{d}{dt_1} + \cdots$, та підставляючи дані вирази у рівняння (10) для першої компоненти $\vartheta\colon T^*(M) \to T(M)$ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε, знаходимо

$$\vartheta_0 K_0'^{*} + K_0'\vartheta_0 = 0, \tag{11}$$

$$\frac{d\vartheta_1}{dt_0} = \vartheta_0 K_1'^* + \vartheta_1 K_0'^* + K_0'\vartheta_1 + K_1'\vartheta_0, \tag{12}$$

$$\frac{d\vartheta_2}{dt_0} = -\frac{d\vartheta_1}{dt_1} + \vartheta_2 K_0'^* + \vartheta_1 K_1'^* + K_1'\vartheta_1 + K_0'\vartheta_2, \quad \ldots, \tag{13}$$

де

$$K_0' = \begin{pmatrix} \partial^3 & 0 \\ 0 & -2\partial^3 \end{pmatrix}, \qquad K_0'^* = \begin{pmatrix} -\partial^3 & 0 \\ 0 & 2\partial^3 \end{pmatrix},$$

$$K_1' = \begin{pmatrix} \partial u^{(1)} & -\partial v^{(1)} \\ -v_x^{(1)} & -u^{(1)}\partial \end{pmatrix}, \qquad K_1'^* = \begin{pmatrix} -u^{(1)}\partial & -v_x^{(1)} \\ v^{(1)}\partial & \partial u^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що мають місце рівності $\dfrac{d}{dt_0}\vartheta_0 = \dfrac{d}{dt_1}\vartheta_0 = \cdots = \dfrac{d}{dt_m}\vartheta_0 = \cdots = 0$. Помноживши рівняння (11)–(13) на вектор $\varphi^{(0)} \in T^*(M)$, що задовольняє відповідне рівняння Лакса (2) при $u = v = 0$

$$\frac{d}{dt_0}\varphi^{(0)} + K_0'^*\varphi^{(0)} = 0, \tag{14}$$

послідовно знаходимо

$$\frac{d}{dt_0}(\vartheta_0\varphi^{(0)}) = K_0'(\vartheta_0\varphi^{(0)}), \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt_0}(\vartheta_1\varphi^{(0)}) - K_0'(\vartheta_1\varphi^{(0)}) = \vartheta_0(K_1'^*\varphi^{(0)}) + K_1'(\vartheta_0\varphi^{(0)}), \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt_0}(\vartheta_2\varphi^{(0)}) - K_0'(\vartheta_2\varphi^{(0)}) = \vartheta_1(K_1'^*\varphi^{(0)}) + K_1'(\vartheta_1\varphi^{(0)}) - (\vartheta_1' K^{(2)})\varphi^{(0)}, \quad \ldots, \tag{17}$$

де

$$K^{(2)} = \big(u^{(1)}u_x^{(1)} - v^{(1)}v_x^{(1)}, -u^{(1)}v_x^{(1)}\big)^\intercal.$$

Враховуючи 2π-періодичність многовиду M, для знаходження розв'язків рівняння (15)–(17) скористаємось розвиненням у ряд Фур'є. Запишемо елементи $w^{(1)} = (u^{(1)}, v^{(1)})^\intercal \in M$, $\varphi^{(0)} = (\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)})^\intercal \in T^*(M)$ так:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(0)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi}_{1,k}^{(0)} \exp(kx + k^3 t_0), \qquad & \varphi_2^{(0)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi}_{2,k}^{(0)} \exp(kx - 2k^3 t_0), \\ u^{(1)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{u}_{1,k}^{(1)} \exp(kx + k^3 t_0), \qquad & v^{(1)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{v}_{1,k}^{(1)} \exp(kx - 2k^3 t_0). \end{aligned} \tag{18}$$

Числа $\overline{u}_{1,k}^{(1)}$, $\overline{v}_{1,k}^{(1)}$, $\overline{\varphi}_{1,k}^{(0)}$, $\overline{\varphi}_{2,k}^{(0)} \in \mathbb{C}$ є постійні і довільні. При отриманні розв'язків (18) ми скористалися відповідно рівностями (14) і

$$\big(u_{t_0}^{(1)}, v_{t_0}^{(1)}\big)^\intercal = K_0'\big(u^{(1)}, v^{(1)}\big)^\intercal. \tag{19}$$

Підставляючи послідовно розвинення (18) у рівняння (15)–(17) і розв'язуючи їх у явному вигляді методом Фур'є, знаходимо шуканий імплектичний оператор $\vartheta\colon T^*(M) \to T(M)$

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \partial^3 + \dfrac{1}{3}(u\partial + \partial u) & \dfrac{1}{3}(v\partial + \partial v) \\ \dfrac{1}{3}(v\partial + \partial v) & 2\partial^3 + \dfrac{1}{3}(u\partial + \partial u) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В роботі [9, с. 1099] знайдено обернений імплектичний оператор $J(\widetilde{u}, \varphi)\colon T(M) \to T^*(M)$ для системи типу (1), а саме

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{u}_{\widetilde{t}} &= \frac{1}{2}\widetilde{u}_{xxx} + 3\widetilde{u}\widetilde{u}_x - 3\varphi\varphi_x, \\ \varphi_{\widetilde{t}} &= -\varphi_{xxx} - 3\widetilde{u}\varphi_x \end{aligned}\right\} = K[\widetilde{u}, \varphi]. \tag{21}$$

Система (21) заміною

$$\widetilde{t} = 2t, \qquad \widetilde{u} = k_1 u, \qquad \varphi = k_2 v \tag{22}$$

зводиться до досліджуваної системи (1) при $k_1 = k_2 = 1/6$. Враховуючи заміну (22), обернений імплектичний оператор $J(\widetilde{u}, \varphi)$ у [9]

$$J(\widetilde{u}, \varphi) = \begin{pmatrix} \partial + 2\partial^{-1}\widetilde{u} + 2\widetilde{u}\partial^{-1} & -2\partial^{-1}\varphi \\ -2\varphi\partial^{-1} & -2\partial \end{pmatrix}$$

при $\widetilde{u} = k_1 u = u/6$, $\varphi = k_2 v = v/6$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \partial + \dfrac{1}{3}\partial^{-1}u + \dfrac{1}{3}u\partial^{-1} & -\dfrac{1}{3}\partial^{-1}v \\ -\dfrac{1}{3}v\partial^{-1} & -2\partial \end{pmatrix} = \eta^{-1} \tag{23}$$

і збігається з оберненим імплектичним оператором для системи (1). Використовуючи формули $\eta_n = \vartheta(\eta^{-1}\vartheta)^n$, $n \in \mathbb{Z}$ [3, 9], отримуємо другий імплектичний оператор при $n = 1$:

$$\eta_1 = \eta = \vartheta(\eta^{-1}\vartheta),$$

де ϑ, η^{-1} визначаються відповідно виразами (20), (23). Враховуючи вирази (8), робимо висновок: система (1) має бігамільтонів вигляд (9), де гамільтоніани H_ϑ, $H_\eta \in D(M)$ визначаються рівностями

$$H_\vartheta = 18\gamma_3 = \int_0^{2\pi} (v^2 - u^2)\, dx, \tag{24}$$

$$H_\eta = 648\gamma_7 = \int_0^{2\pi} (-5u^4 - 3v^4 + 6u^2v^2 + 60uu_x^2 + 36u_{xx}^2 - 144v_{xx}^2 + 72uv_x^2 + 12v^2u_{xx})\, dx. \tag{25}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що оператори $\vartheta, \eta \in T^*M \to T(M)$ імплектичні, нетерові і узгоджені, тобто оператор $\Lambda = \eta^{-1}\vartheta$ дійсно наслідково рекурсійний і для нього виконується тотожність $\operatorname{grad}\gamma_{j+4} = \Lambda \operatorname{grad}\gamma_j$, для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$. На основі цієї тотожності маємо, що

$$\lambda^4 \vartheta \operatorname{grad}\gamma(\lambda) = \eta \operatorname{grad}\gamma(\lambda),$$

де $\gamma(\lambda) = \int_0^{2\pi} \sigma(x,\lambda)\, dx$ — породжуюча функція законів збереження (7), а $\lambda^4 \in \mathbb{C}$ — власні значення рекурсійного оператора $\Lambda = \eta^{-1}\vartheta \colon T^*(M) \to T^*(M)$ при $|\lambda| \to \infty$. Звідси отримуємо, що для всіх $j, k \in \mathbb{Z}_+$

$$\{\gamma_j, \gamma_k\}_\vartheta = 0 = \{\gamma_j, \gamma_k\}_\eta,$$

тобто закони збереження (7) знаходяться в інволюції відносно обох дужок Пуассона на многовиді M.

Теорема 1. *Динамічна система* (1) *— бігамільтонова, тобто її можна зобразити у вигляді* (9), *де H_ϑ, $H_\eta \in D(M)$ — функціонали Гамільтона* (24), (25) *на многовиді $M \subset C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$; ϑ, η — пара імплектичних операторів вигляду* (20), (23) *відповідно, що факторизує оператор Λ.*

Наслідок. *При умові попередньої теореми всі оператори $\vartheta^{(n)} = \eta\Lambda^n$, $n \in \mathbb{Z}$, є імплектичними.*

4. Зображення типу Лакса. Покажемо, що динамічна система (1) має стандартне зображення типу Лакса, що дає змогу проінтегрувати його методом оберненого спектрального перетворення [5, 13] у явному вигляді.

Нехай $L[u,v;\lambda]$ — оператор типу Лакса, зображений у $(m \times m)$-матричному вигляді, $m \in \mathbb{Z}_+$:

$$L = \frac{d}{dx} - \mathcal{A}[u,v;\lambda], \tag{26}$$

$$\operatorname{tr}\mathcal{A}[u,v;\lambda] = 0, \tag{27}$$

де $\mathcal{A}[u,v;\lambda]$ — локальний матричнозначний гладкий функціонал на M, що залежить від спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. Тоді для градієнта вигляду $\varphi(\lambda) = \operatorname{grad}\operatorname{tr} S(x_0;\lambda)$, де $S(x_0;\lambda)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, — матриця монодромії, справедливе співвідношення

$$\lambda^4 \varphi(\lambda) = \Lambda\varphi(\lambda). \tag{28}$$

При цьому, як відомо [5, 12], відповідна матриця монодромії задовольняє рівняння Новікова–Лакса

$$\frac{dS}{dx} = [\mathcal{A}, S], \tag{29}$$

яке є основним співвідношенням для аналітично-алгебраїчного зображення Лакса (26) у явному вигляді. На основі співвідношення (28) та градієнтно-голономного алгоритму [5, 12, 13, 15] стверджуємо, що зображення Лакса (26) для динамічної системи (1) існує. Порядок $m \in \mathbb{Z}_+$ матриці $\mathcal{A}[u,v;\lambda]$ визначається за формулою: $m(m+1)/2 \geqslant \dim T^*(M) \times \times \operatorname{eff}\deg\Lambda = 10$, де $\operatorname{eff}\deg\Lambda \in \mathbb{Z}_+$ є ефективним диференціальним степенем рекурсійного оператора Λ. У нашому випадку мінімальний порядок m шуканої матриці $\mathcal{A}$ дорівнює 4.

Реалізація цих властивостей на основі градієнтно-голономного алгоритму [5, 12–14] приводить до прямого алгебро-аналітичного методу побудови невідомої матриці $\mathcal{A}[u,v;\lambda]$ в (26) з властивістю (27) і, тим самим, явного зображення типу Лакса для (1). Беручи до уваги співвідношення (26), (27), з (28) і (29) знаходимо такі рівності:

$$\begin{aligned}
&\lambda^4 \operatorname{tr} S\Big(([[B,\mathcal{A}],\mathcal{A}_x] + [B_x,\mathcal{A}_x] + 2[[B,\mathcal{A}]_x,\mathcal{A}] + 2[B_{xx},\mathcal{A}] + [B,\mathcal{A}]_{xx} + B_{xxx})u_x - \\
&\quad - ([[B,\mathcal{A}],\mathcal{A}] + [B_x,\mathcal{A}] + [B,\mathcal{A}]_x + B_{xx})u_{xx} + \left(\frac{2}{3}u[B,\mathcal{A}] + \frac{2}{3}u_x B + \frac{2}{3}uB_x\right)u_x - \\
&\quad - \frac{1}{3}uu_{xx}B + \frac{1}{3}Bu_x^2 - \frac{1}{3}u_{xx}B - \left(\frac{1}{3}v_x C + \frac{1}{3}v[C,\mathcal{A}] + \frac{1}{3}vC_x\right)u_x - \frac{1}{3}u_{xx}vC\Big) = \\
&\quad = \operatorname{tr} S(([[\mathcal{A}_u,\mathcal{A}],\mathcal{A}] + [\mathcal{A}_u,\mathcal{A}]_x)u_x - u_{xx}[\mathcal{A}_u,\mathcal{A}]), \\
&\lambda^4 \operatorname{tr} S\left(-\frac{1}{3}v^2 B - 2([[C,\mathcal{A}],\mathcal{A}] + C_x)v + 2([C,\mathcal{A}]_x + C_{xx})v_x\right) = \operatorname{tr} S([\mathcal{A}_v,\mathcal{A}] + v_x\mathcal{A}_v),
\end{aligned} \tag{30}$$

де

$$B = [\mathcal{A}_u,\mathcal{A}_{xx}] + 4[\mathcal{A},\mathcal{A}_x]\mathcal{A}_u + \frac{1}{3}u_x\mathcal{A}_u + \frac{2}{3}u[\mathcal{A}_u,\mathcal{A}] + \frac{1}{3}v_x\mathcal{A}_v + \frac{2}{3}v[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],$$

$$C = 2[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}_{xx}] + 8[\mathcal{A},\mathcal{A}_x]\mathcal{A}_v + \frac{1}{3}u_x\mathcal{A}_u + \frac{2}{3}u[\mathcal{A}_u,\mathcal{A}] + \frac{1}{3}u_x\mathcal{A}_v + \frac{2}{3}u[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}].$$

При отриманні рівностей (30) ми врахували, що $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_u = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v = 0$, оскільки матриця $\mathcal{A}$ не містить перших похідних. Значить, матриці $\mathcal{A}_u$, $\mathcal{A}_v$ можуть залежати лише від параметра λ і не залежать від елемента $(u,v) \in M$, а також згідно з (20) і (23) мають місце співвідношення

$$\mathcal{A}[u,v;\lambda] = \mathcal{A}(u,v;\lambda), \tag{31}$$

$$\lambda^4(\eta^{-1}\vartheta)\operatorname{tr}(Sa[\mathcal{A}]) = \operatorname{tr}(Sa[\mathcal{A}]), \tag{32}$$

де, за визначенням, $a[\mathcal{A}] = (\mathcal{A}_u, A_v)^{\intercal}$.

Вибираючи матрицю $\mathcal{A}[u,v;\lambda]$ у загальному вигляді

$$\mathcal{A}(u,v;\lambda) = \{a_{ij}(u,v;\lambda)\colon i,j = \overline{1,4}\},$$

із (30)–(32) знаходимо за допомогою досить простих, але дещо громіздких алгебраїчних обчислень шукані елементи матриці: $a_{11} = 0$, $a_{12} = -u+v$, $a_{13} = 0$, $a_{14} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = \lambda^4$, $a_{33} = 0$, $a_{34} = -u-v$, $a_{41} = 0$, $a_{42} = 0$, $a_{43} = 1$, $a_{44} = 0$.

Тобто L-оператор в (26) має вигляд

$$L = \frac{d}{dx} - \begin{pmatrix} 0 & -u+v & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 & 0 & -u-v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Теорема 2. *Нелінійна динамічна система* (1) *має стандартне зображення типу Лакса з L-оператором* (33) *і є цілком інтегровною за Ліувіллем–Лаксом.*

Знайдене зображення типу Лакса дозволяє знайти за допомогою методу оберненої задачі розсіяння точні розв'язки динамічної системи (1), зокрема скінченнозонні і солітонні.

1. *Marsden J., Weinstein A.* Reduction of symplectic manifolds with symmetry // Rept. Math. Phys. – 1974. – **5**, No 1. – P. 121–130.
2. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.* О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач // Функц. анализ и его приложения. – 1976. – **10**, № 1. – С. 9–13.
3. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equations // J. Math. Phys. – 1978. – **19**, No 3. – P. 1156–1162.
4. *Magri F.* A geometrical approach to the nonlinear solvable equations // Lect. Notes Physics. – 1980. – **120**. – P. 233–263.
5. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский А. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова. – Москва: Наука, 1980. – 320 с.
6. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемости гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 5. – С. 109–151.
7. *Ньюелл А.* Солитоны в математике и физике. – Москва: Мир, 1989. – 326 с.
8. *Hirota R., Satsuma J.* Soliton solutions of a coupled Korteweg–de Vries equation // Phys. Lett. A. – 1981. – **85**. – P. 407–408.
9. *Fucssteiner B.* The Lie algebra structure of degenerate Hamiltonian and bi-Hamiltonian systems // Progr. Theor. Phys. – 1982. – **68**, No 4. – P. 1082–1104.
10. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1983. – 639 с.
11. *Дринфельд В. Г., Соколов В. В.* Алгебра Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Новейшие достижения. – Москва: ВИНИТИ, 1984. – Т. 15. – С. 81–180.
12. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Под ред. О. С. Парасюка. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
13. *Prykarpatsky A., Mykytiuk I.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. – 588 p.
14. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 237 с.
15. *Гентош О., Притула М., Прикарпатський А.* Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах. – Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 2006. – 408 с.

Львівський національний університет ім. Івана Франка
Надійшло до редакції 01.09.2010

M. O. Starchak, M. M. Prytula

Full integrability of a nonlinear Korteweg–de Vries-type hydrodynamical system

A nonlinear Korteweg–de Vries-type hydrodynamical system is studied. An infinite hierarchy of functionally independent conservation laws in involution is constructed, and the corresponding compatible pair of implectic operators proving the bi-Hamiltonian integrability of the system under study is found. Based on the gradient-holonomic algorithm, an explicit Lax-type representation is constructed.