ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2011

УДК 519.6

О. М. Литвин, Ю. І. Першина

Розв'язання тривимірної задачі комп'ютерної томографії з використанням невеликої кількості томограм

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Пропонується метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла, який використовує лише чотири томограми. Метод будується за допомогою інтерфлетації функцій трьох змінних. Також пропонуються загальні вигляди щільностей об'єктів, що описуються функціями, які точно відновлюються за допомогою вказаної інформації.

Світові тенденції в галузі приладобудування в останній час набули значних змін. Це викликано необхідністю збільшення якості діагностики, що приводить як до утворення нових високоінформативних діагностичних приладів, так і до модернізації традиційних технологій.

Сучасний рівень медичної техніки дозволяє виявити структурні та функціональні зміни одного і того ж органу за допомогою приладів, що мають різний принцип дії. В подібних умовах на перше місце виходить інформаційна складова досліджень.

На даному етапі одним з найбільш інформативних методів є томографія, яка дає більше інформації про досліджуваний об'єкт, ніж інші відомі методи діагностики.

Істотно підвищити інформативність отриманих при томографії даних можна шляхом використання різних методів розв'язання тривимірних задач комп'ютерної томографії, що дозволяють роздивитись окремі частини досліджуваного об'єкта під довільним кутом.

Авторами були розроблені високоточні методи тривимірної комп'ютерної томографії за допомогою операторів інтерфлетації та мішаної апроксимації [1]. В роботах [2–4] наводиться загальний метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, заданих на системі трьох груп перерізаних площин, в кожній з яких площини паралельні. В роботах [2, 3] внутрішня структура тривимірного тіла відновлювалася з використанням операторів інтерфлетації функцій трьох змінних (для випадку, коли експериментальні дані — томограми — задаються точно), а в роботі [4] — за допомогою оператора мішаної апроксимації (для випадку, коли існує похибка в заданих експериментальних даних). Авторами також був досліджений новий метод відновлення внутрішньої структури динамічного тривимірного тіла (наприклад, серця) за допомогою оператора інтерфлетації [5, 6]. У вказаних роботах використовуються n експериментальних даних — томограм, паралельних осі Ox, m томограм, паралельних осі Oy, та p томограм, паралельних осі Oz. Був проведений обчислювальний експеримент, в якому використовувалося 235 томограм. Але отримання томограм за допомогою рентгенівського комп'ютерного томографа — це опромінення пацієнта. І одна із задач комп'ютерної томографії — зменшити опромінення. Тому актуальною є розробка методів відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою невеликої кількості вхідних даних, тобто томограм.

Нижче пропонується метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла, який використовує чотири томограми та будується за допомогою інтерфлетації функцій трьох змінних. А також наводяться загальні вигляди щільностей або коефіцієнтів поглинання об'єктів, які описуються функціями, що точно відновлюються за допомогою вказаної інформації.

Постановка задачі. Нехай функція $f(x,y,z) \in C^{(s,p,0)}(\Omega)$, $s,p=\overline{0,N}$, $\Omega \subset R^3$ являє собою щільність тривимірного тіла (або коефіцієнт поглинання, послаблення тощо) та задані чотири площини $x = x_k$, $y = y_l$, $k,l = 1,2$. Не обмежуючи загальності, беремо площини, перпендикулярні двом координатним осям, наприклад осі Ox та Oy. З комп'ютерного томографа отримані томограми, які лежать на заданих площинах. Задача полягає в тому, щоб за вказаними вхідними даними побудувати оператор, який буде відновлювати досліджуваний об'єкт, та навести загальний вигляд функцій, які будуть відновлюватися точно побудованим оператором.

Опис методу. Наведемо необхідні визначення.

Визначення 1. Слідом функції $f(x,y,z)$ на площині Π будемо називати функцію двох змінних $\omega(x,y)$ або $\omega(x,z)$, або $\omega(y,z)$, яка в кожній точці цієї площини набуває тих самих значень, що й функція $f(x,y,z)$

$$f(x,y,z)|_\Pi = \omega|_\Pi.$$

Визначення 2. Інтерфлетацією функції $f(x,y,z)$ називається відновлення (можливо, наближене) функції $f(x,y,z)$ в точках між заданими площинами за допомогою слідів на цих площинах.

Визначення 3. Томограмою на площині Π будемо називати одну з трьох функцій

$$\mathrm{T}(\overline{x}) = \begin{cases} f(x_\Pi(y,z),y,z), \\ f(x,y_\Pi(x,z),z), \\ f(x,y,z_\Pi(x,y)), \end{cases} \qquad \overline{x} = \begin{cases} (x,y), \\ (x,z), \\ (y,z). \end{cases}$$

Визначимо оператор, за допомогою якого буде відновлюватися внутрішня структура тривимірного тіла, що задана у вигляді функції $f(x,y,z)$.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x,y,z) \in C^{(s,p,0)}(\Omega)$, $s,p = \overline{0,N}$, $\Omega \subset R^3$ являє собою внутрішню структуру тривимірного тіла та задані чотири площини $x = x_k$, $y = y_l$, $k,l = 1,2$. Оператор*

$$L(x,y,z) = (L_1 + L_2 - L_1 L_2) f(x,y,z),$$

де

$$L_1 f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{s=0}^{N} h_{i,s}(x) f^{(s,0,0)}(x_i,y,z);$$

$$L_2 f(x,y,z) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{p=0}^{N} g_{j,p}(y) f^{(0,p,0)}(x, y_j, z);$$

$$L_1 L_2 f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=0}^{N}\sum_{p=0}^{N} h_{i,s} g_{j,p}(x) f^{(s,p,0)}(x_i, y_j, z),$$

де $h_{i,s}$, $g_{j,p}$ *— допоміжні функції з властивостями*

$$h_{u,s}(x_v) = \delta_{uv}, \qquad g_{u,s}(y_v) = \delta_{uv},$$

δ_{uv} *— символ Кронекера,*

$$\sum_{i=1}^{2} h_{i,s}(x) = 1, \qquad \sum_{j(x)=1}^{2} g_{j,p}(x) = 1, \qquad s,p = \overline{0,N},$$

є оператором інтерфлетації функцій трьох змінних, який задовольняє умови

$$\left.\frac{\partial L(x,y,z)}{\partial x^p}\right|_{x=x_k} = \left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x^p}\right|_{x=x_k}, \qquad p = \overline{0,N}, \qquad k = 1,2; \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial L(x,y,z)}{\partial y^s}\right|_{y=y_l} = \left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y^s}\right|_{y=y_l}, \qquad s = \overline{0,N}, \qquad l = 1,2. \tag{2}$$

Оператор інтерфлетації, визначений в теоремі 1, відновлює внутрішню структуру тривимірного тіла за відомими чотирма томограмами, що лежать на заданих площинах. Визначимо похибку відновлення цим оператором.

Теорема 2. *Нехай внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією* $f(x,y,z) \in C^{(1,1,0)}(\Omega)$, $\Omega \subset R^3$. *Тоді для похибки* $Rf(x,y,z)$ *наближеного відновлення внутрішньої структури* $f(x,y,z)$ *тривимірного тіла оператором* $L(x,y,z)$, *побудованим за допомогою заданого набору площин та томограм, що лежать на цих площинах, виконується рівність:*

$$Rf(x,y,z) = f(x,y,z) - L(x,y,z) = (I - L_1 - L_2 + L_1 L_2) f(x,y,z) =$$
$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} h_k(x) g_l(y) \int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{y_l}^{y} f^{(1,1,0)}(u,v,z)\, du dv. \tag{3}$$

Теорема 3. *Нехай внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією* $f(x,y,z) \in C^{(2,2,0)}(\Omega)$, $\Omega \subset R^3$. *Тоді для похибки* $Rf(x,y,z)$ *наближеного відновлення внутрішньої структури* $f(x,y,z)$ *тривимірного тіла оператором* $L(x,y,z)$, *побудованим за допомогою заданого набору площин та томограм, що лежать на цих площинах, виконується рівність:*

$$Rf(x,y,z) = f(x,y,z) - Lf(x,y,z) = (I - L_1 - L_2 + L_1 L_2) f(x,y,z) =$$
$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} h_k(x) g_l(y) \int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{y_l}^{y} f^{(2,2,0)}(u,v,z)(x_k - u)(y_l - v)\, du dv. \tag{4}$$

Тепер знайдемо загальний вигляд функцій, що описують внутрішню структуру тривимірного тіла, які точно будуть відновлюватися за допомогою оператора інтерфлетації, побудованого в теоремі 1, використовуючи чотири томограми, що лежать на заданих площинах $x = x_k$, $y = y_l$, $k, l = 1, 2$. Розглянемо два випадки:

1) функція неперервна та має дві неперервні похідні, тобто $f(x, y, z) \in C^{(1,1,0)}(\Omega)$, $\Omega \subset \subset R^3$. Для точного відновлення похибка наближення повинна дорівнювати нулю. Із загального вигляду похибки (3) випливає, що повинна виконуватися рівність

$$\int\limits_{x_k}^{x} \int\limits_{y_l}^{y} f^{(1,1,0)}(u, v, z)\, dudv = 0.$$

Для виконання цієї рівності повинно виконуватися $f^{(1,1,0)}(x, y, z) = 0$. Розв'яжемо це диференціальне рівняння:

$$f^{(0,1,0)}(x, y, z) = \int f^{(1,1,0)}(x, y, z)\, dx = \varphi(y, z);$$

$$f^{(0,0,0)}(x, y, z) = \int f^{(0,1,0)}(x, y, z)\, dy = \int \varphi(y, z)\, dv + \psi(x, z) = w(y, z) + \psi(x, z).$$

Тобто, функція, яка точно відновлюється за допомогою оператора інтерфлетації, визначеного в теоремі 1, має вигляд:

$$f(x, y, z) = w(y, z) + \psi(x, z);$$

2) функція неперервна та має чотири неперервні похідні, тобто $f(x, y, z) \in C^{(2,2,0)}(\Omega)$, $\Omega \subset R^3$. Для точного відновлення похибка наближення повинна дорівнювати нулю. Із загального вигляду похибки (4) випливає, що повинна виконуватися рівність:

$$\int\limits_{x_k}^{x} \int\limits_{y_l}^{y} f^{(2,2,0)}(u, v, z)(x_k - u)(y_l - v)\, dudv = 0.$$

Для виконання цієї рівності повинно виконуватися $f^{(2,2,0)}(x, y, z) = 0$. Розв'яжемо це диференціальне рівняння:

$$f^{(1,2,0)}(x, y, z) = \int f^{(2,2,0)}(x, y, z)\, dx = \varphi_1(y, z);$$

$$f^{(0,2,0)}(x, y, z) = \int f^{(1,2,0)}(x, y, z)\, dx = \int \varphi_1(y, z)\, dx = x\varphi_1(y, z) + \varphi_2(y, z);$$

$$f^{(0,1,0)}(x, y, z) = \int (x\varphi_1(y, z) + \varphi_2(y, z))\, dy = x \int \varphi_1(y, z) dy + \int \varphi_2(y, z)\, dy + \psi_1(x, z);$$

$$f^{(0,0,0)}(x, y, z) = \int \left[x \int \varphi_1(y, z) dy + \int \varphi_2(y, z) dy + \psi_1(x, z) \right] dy =$$

$$= x \int \left[\int \varphi_1(y, z) dy \right] dy + \int \left[\int \varphi_2(y, z) dy \right] dy + y\psi_1(x, z) + \psi_2(x, z).$$

Тобто, функція, яка точно відновлюється за допомогою вищевиведеного оператора інтерфлетації, має вигляд:

$$f(x,y,z) = x \int \left[\int \varphi_1(y,z)dy \right] dy + \int \left[\int \varphi_2(y,z)dy \right] dy + y\psi_1(x,z) + \psi_2(x,z).$$

Таким чином, в даній роботі запропонований та досліджений метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою всього чотирьох томограм, паралельних осі Oz і взаємно перпендикулярних між собою. Встановлено клас функцій, які описують внутрішню структуру тіла і точно можуть бути відновлені за допомогою розробленого методу.

1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функції та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетації функцій // Доп. НАН України. – 2005. – № 1. – С. 20–24.
3. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетації функції // Там само. – 2005. – № 8. – С. 67–71.
4. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням томограм та мішаної апроксимації // Таврічний вісник інформатики та математики. – 2008. – № 2. – С. 18–24.
5. *Lytvyn O. M., Pershina Y. I., Nechuyviter O. P. et al.* Construction methods of 4D mathematical models of 3D bodies on a basis of interlineation, interflatation, blending approximation and wavelets. What, Where, When: Multi-dimensional Advances for Industrial Process Monitoring: Proceedings of International Symposium 23–24 June 2009. – Leeds, UK. – 2009. – P. 443–453.
6. *Першина Ю. І.* 4D математична модель 3D тіла в комп'ютерній томографіїі. Питання оптимізації обчислень (ПОО – XXXV): Праці Міжнар. симп. 24–29 вересня 2009 р. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2009. – Т. 2. – С. 188–193.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
Надійшло до редакції 21.12.2009

O. M. Lytvyn, Y. I. Pershina

The solution of a three-dimensional problem of computer tomography with the use of a small number of tomograms

A method of restoration of the internal structure of a three-dimensional body which uses only four tomograms is offered. The method is constructed with the help of interflatation functions of three variables. The general views of the density of objects described by functions which are precisely restored by means of the specified information are presented.