УДК 519.21,519.718

І. В. Малик, Б. В. Савчук

Асимптотика збурених стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Одержано критерій асимптотичної поведінки для збурених стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

Нехай на ймовірнісному базисі [1] $(\Omega, F, P, \Im)$, де $\Im := \{F_t, t \geqslant 0\}$ — фільтрація, задано випадковий процес $x(t)$, який задовольняє лінійне стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НСДРР)

$$dDx_t = \{Lx_t + f(t)\}dt + \{Gx_t + g(t)\}dw(t) \tag{1}$$

та невипадкову початкову умову

$$x_0 = \varphi. \tag{2}$$

Тут випадковий процес $x(t) := x(t,\omega) : R_+ \times \Omega \to R^1$; $x_t := \{x(t+s), -h \leqslant s \leqslant 0 \in \in C([-h,0])$ — відрізок траєкторії; $\varphi \in C([-h,0])$; $f(t)$, $g(t)$ — неперервно-диференційовні детерміновані функції, для яких рівняння (1) має сенс; $w(t) := w(t,\omega)$ — одновимірний випадковий вінеровий процес, що узгоджений з $\Im$; D, L, G — різницеві оператори, задані співвідношеннями [2, 3]:

$$Dx_t := \sum_{i=0}^{n} \delta_i x(t-\tau_i); \qquad Lx_t := \sum_{i=0}^{n} l_i x(t-\tau_i); \qquad Gx_t := \sum_{i=0}^{n} g_i x(t-\tau_i), \tag{3}$$

де $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = h < \infty$; δ_i, l_i, g_i — дійсні константи, причому $\delta_0 = 1$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} |\delta_i| < 1$.

Зауваження 1. При $Dx_t := x(t)$, $Lx_t := -lx(t)$, $Gx_t := 0$, $f(t) \equiv 0$, $g(t) \equiv g = \text{const}$, $h = 0$, рівняння (1) перетвориться в рівняння

$$dx(t) = -lx(t)dt + gdw(t), \tag{4}$$

розв'язок якого прийнято називати процесом Орнштейна–Уленбека.

Для задачі (1), (2) має місце теорема існування та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку $x(t) \in R^1$, для якого існує $Ex^2(t) < \infty$.

Зауважимо, що асимптотика частинного випадку НСДРР (1), а саме $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, розглядалася в [4]. В даній роботі також буде використана методика [4].

Поряд з рівнянням (1) розглянемо відповідне незбурене детерміноване диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НДДРР)

$$dDy_t = Ly_t dt \tag{5}$$

та початкову умову

$$y_0 = \varphi. \tag{6}$$

Сформулюємо результати, які будуть використані при доведенні основного результату даної роботи.

Лема 1 [2]. *Якщо*

$$\sum_{i=1}^{n} |\delta_i| < 1,$$

то тривіальний розв'язок $y(t) \equiv 0$ *НДДРР* (5), (6) *є експоненціально стійкий тоді і тільки тоді, коли всі корені характеристичного квазіполінома*

$$V(z) := z\left\{\sum_{i=0}^{n} \delta_i e^{-\tau_i z}\right\} - \sum_{i=0}^{n} l_i e^{-\tau_i z} \tag{7}$$

лежать в лівій півплощині комплексної площини $\mathbf{C}$, *а точніше*

$$\exists\, \rho > 0, \quad \forall\, z \in \mathbf{C}\colon \quad V(z) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z < -\rho. \tag{8}$$

Розглянемо функцію Коші $X(t)$ [2, 3] як розв'язок (5), що задовольняє початкову умову

$$X(t) := \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & -h \leqslant t < 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Має місце

Лема 2 [3]. *Функція Коші* $X(t)$ *має вигляд*

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} z = \mu} e^{zt} V^{-1}(z)\, dz,$$

де $\mu > -\rho$.

Лема 3. *Розв'язок НСДРР* (1), (2) *задовольняє стохастичне інтегральне рівняння (аналог формули варіації сталої)*

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t X(t-s) f(s) ds + \int\limits_0^t X(t-s)\{G x_s + g(s)\} dw(s). \tag{10}$$

Доведення. Подіємо на випадковий процес $x(t)$ (10) різницевим оператором D (3):

$$Dx_t = D\left(y(t) + \int\limits_0^t X(t-s) f(s) ds + \int\limits_0^t X(t-s)\{G x_s + g(s)\} dw(s)\right) =$$

$$= D y_t + \int\limits_0^t D X_{t-s} f(s) ds + \int\limits_0^t D X_{t-s}\{G x_s + g(s)\} dw(s).$$

Використовуючи останню формулу, обчислимо dDx_t:

$$dDx_t = Ly_t dt + DX_0 f(t)\,dt - \int\limits_0^t dDX_{t-s} f(s)\,ds + DX_0\{Gx_t + g(t)\}dw(t) +$$

$$+ \int\limits_0^t dDX_{t-s}\{Gx_s + g(s)\}dw(s) = Ly_t dt + f(t)\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^t LX_{t-s} f(s) ds dt + \{Gx_t + g(t)\}dw(t) + \int\limits_0^t LX_{t-s}\{Gx_s + g(s)\}dw(s)\,dt =$$

$$= L\left(y_t + \int\limits_0^t X(t-s) f(s)\,ds + \int\limits_0^t X(t-s)\{Gx_s + g(s)\}dw(s)\right)dt +$$

$$+ f(t)\,dt + \{Gx_t + g(t)\}dw(t) = \{Lx_t + f(t)\}dt + \{Gx_t + g(t)\}dw(t).$$

Лема 3 доведена.

Зауваження 2. Використовуючи лему 3, отримаємо, що процес Орнштейна–Уленбека (розв'язок задачі (4), (2)) має вигляд

$$x(t) = \varphi(0)e^{-lt} + g\int\limits_0^t e^{t-s} dw(s).$$

Означення. Розв'язок задачі (1), (2) назвемо експоненціально стійким в середньому квадратичному, якщо існують сталі $M > 0$ і $c > 0$, такі, що $\forall\, t \geqslant 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$, $\|\varphi\| \neq 0$

$$E|x(t)|^2 \leqslant Me^{-ct}\|\varphi\|^2, \tag{11}$$

де $\|\varphi\| := \sup\limits_{-h\leqslant t\leqslant 0} |\varphi(t)|$.

Теорема. *Нехай виконуються такі умови:*

1) тривіальний розв'язок задачі (5), (6) *асимптотично стійкий;*

2) характеристичні показники функцій f та g задовольняє співвідношення

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|g(t)|}{t} =: K_1 < 0, \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t} =: K_2 < \rho$$

(у випадку фінітної функції f або g покладемо $K_i = -\infty$, $i = 1, 2$).

Тоді для того щоб

$$\lim_{t\to\infty} E(Gx_t + g(t))^2 = 0, \tag{12}$$

необхідно і достатньо виконання нерівності

$$B := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds < 1, \tag{13}$$

де $G(z) := \sum\limits_{i=0}^n g_i e^{-\tau_i z}$, $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця.

Доведення. Використовуючи (10), отримаємо

$$Gx_t + g(t) = g(t) + Gy_t + \int\limits_0^t GX_{t-s} f(s)\,ds + \int\limits_0^t GX_{t-s}\{Gx_s + g(s)\}\,dw(s).$$

Отже, вірне співвідношення

$$E(Gx_t + g(t))^2 = \left(g(t) + Gy_t + \int\limits_0^t GX_{t-s} f(s)\,ds\right)^2 + \int\limits_0^t H^2(t-s) E(Gx_s + g(s))^2 ds, \quad (14)$$

де $H(t) := GX_t$.

Введемо до розгляду випадковий процес ξ та функцію u, що задані такими співвідношеннями:

$$\xi(t) := Gx_t + g(t), u(t) := g(t) + Gy_t + \int\limits_0^t GX_{t-s} f(s)\,ds. \quad (15)$$

На основі (15) рівність (14) набуває вигляду

$$E\xi^2(t) = u^2(t) + \int\limits_0^t H^2(t-s) E\xi^2(s)\,ds. \quad (16)$$

Для дослідження поведінки $E\xi^2$ застосуємо перетворення Лапласа

$$\Lambda(z) := \int\limits_0^\infty e^{-zt} E\xi^2(t)\,dt.$$

На основі (16) та властивостей перетворення Лапласа отримаємо:

$$\Lambda(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt} u^2(t)\,dt + \Lambda(z) \int\limits_0^\infty e^{-zt} H^2(t)\,dt$$

або

$$\Lambda(z) = \frac{\int\limits_0^\infty e^{-zt} u^2(t)\,dt}{1 - \int\limits_0^\infty e^{-zt} H^2(t)\,dt}. \quad (17)$$

При умові 2 теореми зрозуміло, що

$$\int\limits_0^\infty e^{-zt} u^2(t)\,dt \leqslant K < \infty \qquad \text{при} \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

тобто функція $\int\limits_0^\infty e^{-zt} u^2(t)\,dt$ є аналітичною і не має полюсів при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

Розглянемо знаменник правої частини рівняння (17) $1-\int\limits_0^\infty e^{-zt}H^2(t)\,dt$. Якщо функція $P(z) := \int\limits_0^\infty e^{-zt}H^2(t)\,dt$ менша за модулем 1 при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, то функція $\Lambda(z)$ є аналітичною і не має полюсів при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Це означає, що оригінал $E\xi^2(t) := E(Gx_t + g(t))^2$ поводить себе як експонента у від'ємному степені.

Необхідність доведена.

Доведемо достатність. Припустимо, що умова (13) виконана, проте

$$\lim_{t\to\infty} E(Gx_t + g(t))^2 = \infty.$$

В цьому випадку, згідно з властивостями перетворення Лапласа, для Λ існує дійсний полюс z_0. А це, за умовами теореми, означає, що

$$\int\limits_0^\infty e^{-z_0 t}H^2(t)\,dt = 1,$$

що є неможливим внаслідок того, що P — монотонно спадна функція дійсного аргументу та $P(0) < 1$.

Достатність доведена. Теорема 1 доведена.

Зауваження 3. Якщо припустити, що різницевий оператор G досить "хороший", а саме,

$$\lim_{t\to\infty} E(Gx_t)^2 = \lim_{t\to\infty} Ex^2(t),$$

то умову (12) можна замінити такою:

$$\lim_{t\to\infty} Ex^2(t) = 0. \tag{18}$$

Автори висловлюють щиру вдячність за увагу до даної роботи та цінні поради проф. В. К. Ясинському та акад. НАН України В. С. Королюку.

1. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. – Москва: Физматлит, 1994. – Т. 2. – 473 с.
2. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения – Москва: Мир, 1967. – 545 с.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 420 с.
4. *Малик І. В., Ясинський В. К.* Експоненціальна поведінка в середньому квадратичному розв'язку стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 22–27.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 29.06.2010

I. V. Malyk, B. V. Savchuk

Asymptotics of perturbed stochastic differential difference equations of the neutral type

A criterion of the asymptotic behavior for perturbed stochastic differential difference equations of the neutral type is obtained.