ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2011

МЕХАНІКА

УДК 539.3

В. И. Бабенко

К оптимизации формы строго выпуклой оболочки, жестко закрепленной вдоль плоского края при внешнем давлении

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Серед розглянутих у роботі оболонок знайдено таку, що має найбільше значення асимптотики критичного тиску.

1. Ранее [1] автором было установлено, что среди односвязных, строго выпуклых жестко закрепленных оболочек с высотой H и с плоским краем, ограничивающим область площадью S, наибольшее асимптотическое значение внешнего критического давления имеет сегмент веретенообразной оболочки вращения. В данной работе ставится задача об отыскании среди односвязных, строго выпуклых, жестко закрепленных оболочек с высотой H и с заданным краем ∂F такой оболочки, для которой асимптотическое значение внешнего критического давления будет наибольшим. Задача рассматривается в классе оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка, т. е. срединная поверхность F оболочки — либо эллипсоид, либо эллиптический параболоид, либо двуполостной гиперболоид. Считается, что край ∂F рассматриваемой оболочки плоский и что он лежит в плоскости, ортогональной оси симметрии поверхности F. Материал оболочки — линейно-упругий, однородный, изотропный. Оболочка находится под действием равномерного внешнего давления P.

Далее мы ограничимся рассмотрением только достаточно тонких оболочек с тем, чтобы напряженно-деформированное состояние равновесия оболочки можно было считать в известной степени близким к безмоментному всюду, кроме некоторой области краевого эффекта у края ∂F. Поэтому будем исходить из результатов исследований [2, 3]. Именно, с учетом изотропности материала оболочки, равномерности внешнего давления и жесткого закрепления оболочки вдоль края из формулы (4.2) и из выводов п. 5 работы [3] заключаем, что для асимптотического значения P_* критического давления имеет место следующее выражение:

$$P_* = \min_{(F)} \frac{2\overline{e}K}{1 + [1 - 4K(T_1^1 T_2^2 - T_1^2 T_2^1)/P^2]^{1/2}}, \qquad (1)$$

где $\overline{e} = 2E\delta^2/\sqrt{12(1-\nu^2)}$; K — гауссова кривизна поверхности F, минимум берется по всем внутренним точкам срединной поверхности F; δ — толщина оболочки; E и σ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; T_α^β — смешанные компоненты тензора усилий, определяемого из линейных уравнений безмоментной теории оболочек при условии, что рассматриваемая оболочка находится под действием равномерного внешнего давления P и что вдоль края тангенциальные составляющие смещения точек срединной поверхности F равны нулю (см. краевые условия (5.3) работы [3]). Здесь и далее, если особо не оговорено, греческие индексы пробегают значения 1 и 2, а латинские — 1, 2, 3.

Так же, как в случае эллипсоидальных оболочек [4], при определении компонент тензора усилий воспользуемся методом подобия при афинных преобразованиях [5].

2. Введем декартову систему координат x^1, x^2, x^3, приняв за ось x^3 ось симметрии поверхности F, перпендикулярную плоскости края ∂F, а за координатные плоскости $x^\alpha = 0$ — плоскости симметрии поверхности F. Преследуя единообразие изложения для различных форм рассматриваемых оболочек, отнесем F к гауссовой криволинейной системе координат ξ^1, ξ^2 так, чтобы параметрическое задание поверхности F имело вид:

$$\begin{aligned} &x^1 = c_1\overline{r}(\vartheta)\cos\varphi; \qquad x^2 = c_2\overline{r}(\vartheta)\sin\varphi; \qquad x^3 = c_3\overline{z}(\vartheta); \\ &c_k \equiv \mathrm{const} \neq 0 \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vartheta = \xi^1$, $\varphi = \xi^2$, $\overline{r}(\vartheta)$, $\overline{z}(\vartheta)$ — функции, определяющие форму рассматриваемой оболочки (они приведены в табл. 1, там же указаны ограничения на ϑ_0); $\vartheta = 0$ — вершина оболочки, а $\vartheta = \vartheta_0$ — уравнение края ∂F, который представляет собой эллипс с полуосями $c_1\overline{r}(\vartheta_0)$, $c_2\overline{r}(\vartheta_0)$. Для определенности, не ограничивая общности, полагаем, что

$$c_1 \geqslant c_2. \tag{3}$$

Обозначим через $a_{\alpha\beta}$ компоненты метрического тензора поверхности F в параметризации (2). Далее, наряду с исследуемой оболочкой со срединной поверхностью F, будем рассматривать оболочку вращения со срединной поверхностью вращения $\overline{F}$, декартовы координаты $\overline{x}^k$ которой связаны с координатами x^k поверхности F аффинным преобразованием

$$\overline{x}^k = \frac{1}{c_k}x^k. \tag{4}$$

Из соотношений (2), (4) получаем уравнения поверхности $\overline{F}$ в следующей параметрической форме:

$$\overline{x}^1 = \overline{r}(\vartheta)\cos\varphi; \qquad \overline{x}^2 = \overline{r}(\vartheta)\sin\varphi; \qquad \overline{x}^3 = \overline{z}(\vartheta) \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi). \tag{5}$$

Таблица 1

Функции	Эллипсоид	Параболоид	Гиперболоид
$\overline{r}(\vartheta)$	$\sin\vartheta$	$\mathrm{tg}\,\vartheta$	$\dfrac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{(1-\mathrm{tg}^2\,\vartheta)^{1/2}}$
$\overline{z}(\vartheta)$	$\cos\vartheta$	$-\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\,\vartheta$	$-\dfrac{1}{(1-\mathrm{tg}^2\,\vartheta)^{1/2}}$
$\tau(\vartheta)$	$\mathrm{tg}\,\dfrac{\vartheta}{2}$	$\mathrm{tg}\,\vartheta$	$\mathrm{ctg}\,\vartheta - (\mathrm{ctg}^2\,\vartheta - 1)^{1/2}$
$U_r(\vartheta)$	$\sin^2\vartheta$	$-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}^4\,\vartheta$	$-\dfrac{1}{\mathrm{ctg}^2\,\vartheta - 1}$
ϑ_0	$0 < \vartheta_0 < \pi$	$0 < \vartheta_0 < \dfrac{\pi}{2}$	$0 < \vartheta_0 < \dfrac{\pi}{4}$

Для поверхности вращения $\overline{F}$ координата $\xi^1 = \varphi$ — это азимутальный угол, а $\xi^2 = \vartheta$ — угол между осью x^3 и нормалью $\overline{n}$ к $\overline{F}$ в данной точке (ϑ, φ). Край $\partial\overline{F}$ поверхности $\overline{F}$ — окружность $\vartheta = \vartheta_0$ радиусом $\overline{r}(\vartheta_0)$. Здесь и далее для описания оболочки вращения используем те же обозначения, что и для описания исследуемой оболочки со срединной поверхностью F, снабжая их чертой сверху, а именно: F и $\overline{F}$, x^k и $\overline{x}^k$, $a_{\alpha\beta}$ и $\overline{a}_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta}$ и $\overline{T}_{\alpha\beta}$, и т. д. Ниже для справок приведены выражения для главных радиусов кривизны $\overline{R}_\alpha$ и компонент метрического тензора $\overline{a}_{\alpha\beta}$ поверхности $\overline{F}$, для гауссовой кривизны K поверхности F:

$$\overline{R}_1 = \overline{R}_2^3, \qquad \overline{R}_2 = \frac{\overline{r}}{\sin\vartheta}, \qquad \overline{a}_{11} = \overline{R}_1^2, \qquad \overline{a}_{22} = \overline{r}^2, \qquad \overline{a}_{12} = 0,$$

$$K = \overline{K}\left[c_1 c_2 c_3 \sum \left(\frac{\overline{n}^k}{c_k}\right)^2\right]^{-2}.$$

Здесь и далее принято правило суммирования Энштейна по немым индексам; $\overline{n}^1 = \sin\vartheta \times \times \cos\varphi$, $\overline{n}^2 = \sin\vartheta\sin\varphi$, $\overline{n}^3 = \cos\vartheta$ — проекции орта нормали $\overline{n}$ к $\overline{F}$ на оси декартовой системы координат.

3. Переходим к выводу выражений для компонент тензора усилий. Выпишем уравнения (3.2) и (3.4) из [6, с. 559] для контравариантных компонент тензора усилий $T^{\alpha\beta}$, описывающего безмоментное напряженное состояние равновесия рассматриваемой оболочки в векторной форме (2.29) из [6, с. 555]. Спроектируем их на оси декартовой системы координат x^1, x^2, x^3, получим:

$$\left(\sqrt{a}T^{\alpha\beta}x^k_{/\beta}\right)_{/\alpha} + \sqrt{a}X^k = 0, \tag{6}$$

где индекс после черты означает частную производную по соответствующей координате ξ_1 или ξ_2; X^k — проекции на оси декартовой системы координат вектора плотности X поверхностной нагрузки; в нашем случае $X = -Pn$ (n — орт нормали к F); $a = \det(a_{\alpha\beta})$.

При аффинном преобразовании (4) уравнения (6) будут ковариантными, если принять следующие условия преобразования для компонент тензора усилий и проекций вектора плотности поверхностной нагрузки [5]:

$$\sqrt{a}T^{\alpha\beta} = \sqrt{\overline{a}}\overline{T}^{\alpha\beta}, \qquad \sqrt{a}X^k = c_k\sqrt{\overline{a}}\overline{X}^k. \tag{7}$$

Действительно, подставим соотношения (4), (7) в (6), получим

$$\left(\sqrt{\overline{a}}\overline{T}^{\alpha\beta}\overline{x}^k_{/\beta}\right)_{/\alpha} + \sqrt{\overline{a}}\overline{X}^k = 0. \tag{8}$$

Таким образом, исходная задача о решении системы уравнений (6) для исследуемой оболочки со срединной поверхностью F сводится к решению системы уравнений (8) для оболочки вращения со срединной поверхностью $\overline{F}$, находящейся под действием поверхностной нагрузки, проекции вектора плотности $\overline{X}$ которой $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$ и $\overline{p}_3$ соответственно на координатные базисные векторы системы ξ^1, ξ^2 на $\overline{F}$ и на нормаль $\overline{n}$ равны:

$$\begin{aligned}
&\overline{p}_1 = Pc_3(-d_3\cos 2\varphi - d_1 + d_2)\sin\vartheta\cos\vartheta,\\
&\overline{p}_2 = Pc_3 d_3 \sin\vartheta\sin 2\varphi,\\
&\overline{p}_3 = Pc_3(-d_3\sin^2\vartheta\cos 2\varphi - d_1\sin^2\vartheta - d_2\cos^2\vartheta),
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$d_1 = \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_1c_2}, \qquad d_2 = \frac{c_1c_2}{c_3^2}, \qquad d_3 = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2c_1c_2}.$$

Общее решение уравнений (8) ищем в виде рядов Фурье. Приведем окончательные результаты, полученные для физических компонент $\overline{T}^{(\alpha\beta)} = \overline{T}^{\alpha\beta}\sqrt{\overline{a}_{\alpha\alpha}\overline{a}_{\beta\beta}}$ тензора усилий, в следующем виде:

$$\overline{T}^{(\alpha\beta)} = -Pc_3t_*^{\alpha\beta}; \qquad t_*^{11} = \overline{R}_2t^{11}, \qquad t_*^{12} = t^{12}, \qquad t_*^{22} = \frac{1}{\overline{R}_2}t^{22}, \tag{10}$$

где

$$t^{\alpha\beta} = t_0^{\alpha\beta} + \frac{d_3}{\overline{r}^2}\left[t_r^{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k t_k^{\alpha\beta}\tau^{2k}\right];$$

$$t_0^{11} = \frac{d_2}{2}, \qquad t_0^{12} = 0, \qquad t_0^{22} = \overline{R}_2^2(d_1\sin^2\vartheta + d_2\cos^2\theta) - \frac{d_2}{2};$$

$$t_r^{11} = U_r\cos 2\varphi, \qquad t_r^{12} = V_r\sin 2\varphi, \qquad t_r^{22} = (\overline{r}^4 - U_r)\cos 2\varphi;$$

$$t_k^{11} = -t_k^{22} = \cos 2k\varphi, \qquad t_k^{12} = -\sin 2k\varphi;$$

$$V_r(\vartheta) = -\frac{\tau}{2}\frac{dU_r}{d\vartheta}\Big/\frac{d\tau}{d\vartheta};$$

$\tau = \tau(\vartheta)$, $U_r = U_r(\vartheta)$ — функции, вид которых зависит от формы рассматриваемой оболочки, они приведены в табл. 1; λ_k — постоянные, подлежащие определению из условий жесткого закрепления оболочки вдоль края ∂F.

4. Задачу об определении вектора смещения U точек поверхности F так же, как и в [4], сводим к задаче об определении вектора смещения $\overline{U}$ точек поверхности вращения $\overline{F}$ по компонентам тензора ее тангенциальной деформации $\overline{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ при условиях равенства нулю тангенциальных составляющих вектора $\overline{U}$ вдоль края $\partial\overline{F}$. Из этих условий получаем (см. [4]) следующую систему уравнений, которым должны удовлетворять физические компоненты $\overline{\varepsilon}_{(\alpha\beta)} = \overline{\varepsilon}_{\alpha\beta}/\sqrt{\overline{a}_{\alpha\alpha}\overline{a}_{\beta\beta}}$ тензора деформаций поверхности $\overline{F}$:

$$\int_0^{\vartheta_0}\int_0^{\pi/2}[(\overline{R}_2^2\varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{22}^*)\cos 2k\varphi - 2\overline{R}_2\varepsilon_{12}^*\sin 2k\varphi]\tau^{2k}\frac{\overline{R}_2 d\vartheta d\varphi}{\sin\vartheta\sqrt{a^*}} = 0, \tag{11}$$

где $k = 1, 2, \ldots$;

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^* = -\frac{E\delta\sqrt{a^*}}{Pc_1c_2c_3}\overline{\varepsilon}_{(\alpha,\beta)}; \qquad a^* = \det(a_{\alpha\beta}^*); \qquad a_{\alpha\beta}^* = \frac{a_{\alpha\beta}}{c_1c_2\sqrt{\overline{a}_{\alpha\alpha}\overline{a}_{\beta\beta}}}. \tag{12}$$

Выпишем соотношение упругости (2.3) из [5, с. 115] для исходной оболочки с учетом равенств (7), (10), $\varepsilon_{\alpha\beta} = \overline{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ [4] и обозначений (12) в следующем виде:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^* = (a_{\alpha\rho}^*a_{\beta\sigma}^* - \nu c_{\alpha\rho}^*c_{\beta\sigma}^*)t_*^{\rho\sigma}, \tag{13}$$

где

$$c_{11}^* = c_{22}^* = 0; \qquad c_{12}^* = c_{21}^* = \sqrt{a^*};$$

$$a_{11}^* = \left(d_1 + \frac{\operatorname{tg}^2\vartheta}{d_2} - d_3\cos 2\varphi\right)\cos^2\vartheta; \qquad a_{22}^* = d_1 + d_3\cos 2\varphi;$$

$$a_{12}^* = d_3\cos\vartheta\sin 2\varphi, \qquad a^* = \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2\vartheta}{d_2}(d_1 + d_3\cos 2\varphi)\right]\cos^2\vartheta.$$

Подставим выражения (10), (13) для $t_*^{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^*$ в условия (11), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения констант λ_k. После того как константы λ_k будут определены, находим искомое асимптотическое значение критического давления P_* по формуле (1), которая теперь принимает следующий вид:

$$P_* = \frac{2\overline{e}}{c_3^2}\min_{(\vartheta,\varphi)}\frac{k_*}{1 + [1 - 4k_*(t^{11}t^{22} - t^{12}t^{12})]^{1/2}}, \qquad \text{где} \qquad k_* = \frac{\overline{K}}{(d_2a^*)^2}.$$

В общем виде эта задача решается численно.

5. Вернемся к исходной задаче п. 1. Пусть r_1 и r_2 — полуоси эллипса ∂F — общего края рассматриваемых оболочек, а H — их общая высота, которую примем за единицу. Для параболоидов, не ограничивая общности, полагаем $c_3 = 1$, тогда для них $\vartheta_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, $c_\alpha = r_\alpha/\sqrt{2}$. Для эллипсоидальных оболочек: $c_\alpha = r_\alpha/\sin\vartheta_0$, $\vartheta_0 = \arccos(1 - 1/c_3)$. Для гиперболоидальных оболочек: $c_\alpha = r_\alpha(\operatorname{ctg}^2\vartheta_0 - 1)^{1/2}, \vartheta_0 = \operatorname{arctg}[1 - (1 + 1/c_3)^{-2})]^{1/2}$. В последних двух случаях имеем произвол в задании коэффициента c_3. Из возможных его значений выбираем то, которое сообщает максимум P_*.

Таким образом, было показано, что среди рассматриваемых здесь оболочек наибольшее асимптотическое значение критического давления имеет сегмент F_e эллипсоидальной оболочки вращения с осью вращения, параллельной большей оси эллипса ∂F — края оболочки.

6. Аналитические выкладки показывают, что к этому же результату мы придем, если для асимптотического значения критического давления принять вместо (1) формулу А. В. Погорелова [7]

$$P_{**} = 2\overline{e}\min_{(F)} K.$$

А так как [1] $P_* \leqslant P_{**}$, то для рассматриваемых здесь оболочек справедлива следующая оценка асимптотического значения критического давления $P_* \leqslant 2\overline{e}K_e$, где $K_e = (2H/(r_1r_2 + H^2r_1/r_2))^2$ — наименьшее значение гауссовой кривизны срединной поверхности сегмента F_e эллипсоидальной оболочки вращения; $r_1 \geqslant r_2$.

1. *Бабенко В. И.* К оценке критического давления для строго выпуклой оболочки неканонической формы // Доп. НАН України. – 2009. – № 9. – С. 57–61.
2. *Бабенко В. И.* Геометрическое исследование неустойчивости безмоментных оболочек // Укр. геометр. сборник. – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1972. – Вып. 12. – С. 12–22.
3. *Бабенко В. И.* Потеря устойчивости непологих строго выпуклых анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. – 1977. – № 2. – С. 95–103.
4. *Бабенко В. И.* Критические нагрузки для непологих разноосных эллипсоидальных оболочек при давлении // Прикл. механика. – 1977. – **13**, № 4. – С. 29–33.
5. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. – Ленинград: Судпромгиз, 1962. – 430 с.

6. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959. – 628 с.
7. *Погорелов А. В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. – Москва: Наука, 1967. – 279 с.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 01.10.2010

V. I. Babenko

On the optimization of the shape of a strictly convex shell which is rigidly fixed along the flat edge under external pressure

Among a number of shells under consideration, the shell with the greatest asymptotic value of critical pressure is found.