

В. І. Гуляєв, П. З. Луговий, Ю. О. Заєць

Екранування нестаціонарних хвиль клиноподібним пружним включенням

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Поставлено задачу про поширення і екранування (слабких ударних) хвиль у пружному середовищі з клиноподібним включенням. На основі променевого методу запропоновано методику геометричної побудови фронтів відбитих і заломлених хвиль на поверхнях розділу та обчислення їх інтенсивностей, а також досліджено ефект екранування розривних хвиль у випадках з'єднання середовищ без проковзування і з проковзуванням на площинах контакту.

У зв'язку з питаннями матеріалознавства, сейсмології та сейсморозвідки встановлення найбільш загальних закономірностей явищ поширення хвиль у пружному середовищі є одним з найбільш актуальних напрямків механіки деформівного твердого тіла. Значна увага приділяється вивченню рухів розривних хвиль, що моделюються поверхнями фронтів, які переносять імпульс тиску [1, 2]. Такі хвильові явища мають чітко виражений ударний характер, зумовлений тим, що середовище, яке знаходиться перед рухомою частиною фронту, перебуває в недеформованому стані, за цією поверхнею функції напруження та деформації мають скінченне значення, а безпосередньо на поверхні відбувається розрив неперервності. Щоб описати такі явища, зручно застосовувати нульове наближення променевого методу [3, 4]. Використання даного методу виключає необхідність простежувати динамічний процес на всій розглядуваній області поля і дає можливість обмежитись лише аналізом динаміки середовища на досліджуваній частині поверхні фронту.

Постановка задачі. Рівняння динаміки ідеального лінійно-пружного середовища містять наступні співвідношення [1, 2].

Рівняння руху елемента пружного середовища

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

де σ_{ik} — компоненти тензора пружних напружень; x_k — декартові координати; f_i — компоненти вектора густини масових сил; u_i — компоненти вектора пружних переміщень; ρ — густина речовини пружного середовища; t — час.

Співвідношення Коші для обчислення деформацій суцільного середовища

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Співвідношення Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (i = 1, 2, 3); \\ \sigma_{ij} &= \mu \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j), \end{aligned} \quad (3)$$

де λ і μ — пружні константи середовища.

Під час розв'язування задач про поширення розривних хвиль в пружних середовищах будемо використовувати променевий метод [3, 4]. Його застосування пов'язане з постановкою і з розв'язком двох задач. Перша з них — кінематична. Вона полягає в геометричній побудові променів і системи рухомих еволюціонуючих фронтів, а також у виявленні каустик і геометричних сингулярностей, в околі яких інтенсивність поля необмежено (в рамках ідеальної теорії пружності) зростає [5, 6]. Друга задача є чисто динамічною, пов'язана із визначенням поля напружень в деякій області поверхні хвильового фронту і розв'язується за допомогою системи транспортних рівнянь.

Розглянемо розв'язок рівнянь (1)–(3) руху пружного ізотропного середовища у вигляді плоскої монохроматичної хвилі з хвильовим числом k і фазовою швидкістю v . Її фронтами є поверхні постійних фаз

$$\vec{n} \cdot \vec{r} - vt = \text{const}, \quad (4)$$

які локально збігаються з площадками, що перпендикулярні орту \vec{n} і рухаються зі швидкістю $\vec{v} = v\vec{n}$. В зв'язку з тим, що вектор переміщень \vec{u} неперервний на поверхнях фронтів P - і S -хвиль, для нього справджується представлення у вигляді променевого ряду [3, 4]

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{u}_k(t - \tau)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{u}_k(t - \tau)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (5)$$

де

$$\vec{u}_k = -\varphi_k \nabla \tau + \nabla \varphi_{k-1}; \quad \vec{u}_k = -(\nabla \tau) \times (\psi_k \vec{q}) + \nabla \times (\psi_{k-1} \vec{q}). \quad (6)$$

Для значення тензора напружень $\hat{\sigma}$ в околі фронту маємо вираз

$$\hat{\sigma}(\vec{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\sigma}_k(t - \bar{\tau})^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\sigma}_k(t - \bar{\tau})^k}{k!}. \quad (7)$$

Співвідношення (5), (7) свідчать про те, що при вибраних променевих апроксимаціях і у випадку застосування нульового наближення вектор переміщень $\vec{u}(\vec{x}, t)$ дорівнює нулю на поверхні фронту і лінійно зростає вздовж внутрішньої нормалі, а напруження стають розривними на поверхні, залишаючись постійними вздовж цієї ж нормалі в малому околі фронту. З застосуванням променевого методу в динамічній теорії пружності побудовані рівняння ейконалу

$$(\nabla \tau)^2 = \frac{1}{\alpha^2}; \quad (\nabla \bar{\tau})^2 = \frac{1}{\beta^2} \quad (8)$$

і транспортні рівняння в рекурентній формі

$$2(\nabla \tau) \cdot (\nabla \varphi_k) + \varphi_k \nabla^2 \tau = \nabla^2 \varphi_{k-1}; \quad 2(\nabla \bar{\tau}) \cdot (\nabla \psi_k) + \psi_k \nabla^2 \tau = \nabla^2 \psi_{k-1}. \quad (9)$$

Геометричний зміст рівняння (8) пов'язаний із визначенням геодезичної відстані між двома точками. Він виник внаслідок узагальнення варіаційної задачі про відшукування найкоротшого шляху між двома точками в просторі [6]. Це поняття також передбачає і оптичну інтерпретацію. Якщо припустити, у відповідності до принципу Ферма про найменший час поширення світла, що промені світла є екстремаліями відповідної варіаційної задачі, то

функція, мінімум якої потрібно знайти, являє собою час, необхідний для того, щоб світло пройшло відстань між заданими точками. В оптичних задачах таку функцію називають ейконалом.

Як відзначено в [3, 4], нелінійні з частинними похідними першого порядку рівняння ейконалу (8) породжують систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = 0; \quad \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{p}; \quad \frac{d\tau}{ds} = |\vec{p}|^2; \quad \vec{p} = \nabla\tau.$$

Її розв'язок подається у вигляді

$$\vec{x} = \vec{n}\xi + \vec{f}; \quad \tau = \frac{\xi}{\alpha}; \quad \nabla\tau = \frac{\vec{n}}{\alpha},$$

де \vec{n} — одиничний вектор нормалі до поверхні фронту; f — вектор, що визначає обриси фронту в початковому положенні; ξ — довжина променя. Він визначає сімейство прямолінійних променів $x(s)$ і поверхонь хвильових фронтів $\tau = \text{const}$, перпендикулярних даним променям. Аналогічний розв'язок отримуємо і для S -хвилі.

Шукані переміщення, напруження та їх інтенсивності виражаються через знайдені з розв'язку транспортних рівнянь (9) величини φ_k і $\vec{\psi}_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Граничні умови на площинах розділу пружних середовищ. Застосуємо запропонований підхід для вивчення загальних закономірностей перетворення біжучих хвиль в неоднорідних пружних середовищах. Вони можуть бути використані для розв'язання технічної задачі екранування та динамічного захисту об'єктів, що лежать за площиною розділу і чутливих до динамічного впливу. Для визначення умов більш ефективного екранування розривної хвилі розглянемо дві моделі контакту двох пружних середовищ на площині їх розділу. В першій моделі на площині розділу середовища з'єднані з дотриманням умов неперервності нормальних і дотичних напружень і переміщень, у другій моделі використовуються умови контакту з можливим проковзуванням по площині розділу і рівності нулю на ній дотичних напружень.

Контакт двох середовищ без проковзування. Розглянемо випадок, коли в пружному середовищі I знаходиться пружне включення пару середовища II клиноподібного типу (рис. 1), з'єднаний без проковзування по площинах G_1 і G_2 . Властивості середовища визначаються такими механічними параметрами: $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ — параметри Ламе; ρ_1, ρ_2 — густини. Нехай в середовищі I на площину G_1 під кутом θ_{1-} падає плоска поздовжня розривна P -хвиля з одиничним значенням розриву поздовжньої швидкості \dot{u}_{1-} . Простежимо за характером проникнення даної хвилі в середовище II і далі знову в середовище в I , проходячи через площини G_1, G_2 , і які інтенсивності мають утворені хвилі.

При виведенні рівнянь динамічної взаємодії розривної хвилі з площиною G з'єднання двох середовищ використовуємо умови нерозривності на G переміщень \vec{u} і напружень σ [7, 8]

$$(\vec{u}^{(i)} + \vec{u}^{(r)})|_G; \quad (\hat{\sigma}^{(i)} \cdot \vec{n} + \hat{\sigma}^{(r)} \cdot \vec{n})|_G = \hat{\sigma}^{(t)} \cdot \vec{n}|_G, \quad (10)$$

де індексами t, r, i позначені параметри падаючої, відбитої та заломленої хвилі, відповідно; \vec{n} — вектор одиничної нормалі до площини G . Рівності (10) зводяться до системи рівнянь

$$\alpha_1 \rho_1 \cos^2 \theta_{1+} \dot{u}_{1+} - \beta_1 \rho_1 \sin \psi_{1+} \cos \psi_{1+} \dot{v}_{1+} - \alpha_2 \rho_2 \cos^2 \theta_{2+} \dot{u}_{2+} - \\ - \beta_2 \rho_2 \sin \psi_{2+} \cos \psi_{2+} \dot{v}_{2+} = -\alpha_1 \rho_1 \cos^2 \theta_{1-} \dot{u}_{1-};$$

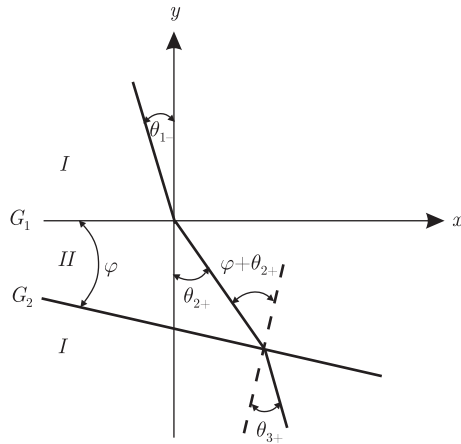


Рис. 1. Схема перетворення променів плоскої розривної хвилі під час проходження клиноподібного шару пружного включення

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \rho_1 \sin \theta_{1+} \cos \theta_{1+} \dot{u}_{1+} + \beta_1 \rho_1 \cos^2 \psi_{1+} \dot{v}_{1+} + \alpha_2 \rho_2 \sin \theta_{2+} \cos \theta_{2+} \dot{u}_{2+} - \\
 & \quad - \beta_2 \rho_2 \cos^2 \psi_{2+} \dot{v}_{2+} = -\alpha_1 \rho_1 \sin \theta_{1-} \cos \theta_{1-} \dot{u}_{1-}; \\
 & \cos \theta_{1+} \dot{u}_{1+} - \sin \psi_{1+} \dot{v}_{1+} + \cos \theta_{2+} \dot{u}_{2+} + \sin \psi_{2+} \dot{v}_{2+} = \cos \theta_{1-} \dot{u}_{1-}; \\
 & \sin \theta_{1+} \dot{u}_{1+} + \cos \psi_{1+} \dot{v}_{1+} - \sin \theta_{2+} \dot{u}_{2+} + \cos \psi_{2+} \dot{v}_{2+} = -\sin \theta_{1-} \dot{u}_{1-}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Вона застосовується для знаходження чотирьох невідомих значень швидкостей \dot{u}_{1+} , \dot{v}_{1+} , \dot{u}_{2+} , \dot{v}_{2+} .

За допомогою викладеного підходу виконані дослідження явищ перетворення плоскої розривної P -хвилі під час її проходження через клиноподібний шар пружного середовища з відмінними механічними властивостями. Пораховані значення швидкостей \dot{u}_{1+} , \dot{v}_{1+} , \dot{u}_{2+} , \dot{v}_{2+} взаємодії падаючої під різними кутами θ_{1-} P -хвилі спочатку з першою площиною контакту G_1 і наступної взаємодії P_2 -, S_2 -хвиль, що проникли в середовище II , із другою площиною контакту G_2 (рис. 1). За середовища I і II вибрані, відповідно, доломіт та вугілля, як одні з найбільш поширених в природі порід, а кут між площинами розділу G_1 та G_2 становить $\varphi = \pm 10^\circ$. На рис. 2, а наведено графіки зміни функцій інтенсивностей \dot{u}_{22++}^u , \dot{v}_{22++}^u , хвиль, відбитих від площини G_2 при взаємодії хвилі \dot{u}_{2+} , що проникла із середовища I в середовище II , залежно від кута падіння θ_{1-} хвилі \dot{u}_{1-} на площину G_2 . Поздовжні і поперечні хвилі, що проникли в середовище I через площину G_2 , відповідно, позначені \dot{u}_{3++}^u і \dot{v}_{3++}^u . При $\theta_{1-} = -2,6^\circ$ реалізується ефект повного внутрішнього відбиття на G_2 та інтенсивність всіх перетворених хвиль прямує до нескінченності. Можна бачити, що хвилі, які проникли через площину G_2 , мають майже вдвічі меншу інтенсивність порівняно з початковою падаючою \dot{u}_{1-} хвилею. В даному випадку розглянута комбінація середовищ має помітні екрануючі властивості.

Контакт двох середовищ на площині розділу з проковзуванням. Якщо реалізується випадок контакту тіл з проковзуванням, то на площині G в системі (10) залишаються вірними лише умови рівності нормальних компонент переміщень і напружень, дві інші умови замінюються рівністю нулю дотичних напружень на обох площинах контакту. У цьому випадку система (11) замінюється рівняннями

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \rho_1 \cos^2 \theta_{1+} \dot{u}_{1+} - \beta_1 \rho_1 \sin \psi_{1+} \cos \psi_{1+} \dot{v}_{1+} - \alpha_2 \rho_2 \cos^2 \theta_{2+} \dot{u}_{2+} - \\
& \quad - \beta_2 \rho_2 \sin \psi_{2+} \cos \psi_{2+} \dot{v}_{2+} = -\alpha_1 \rho_1 \cos^2 \theta_{1-} \dot{u}_{1-}; \\
& \alpha_1 \rho_1 \sin \theta_{1+} \cos \theta_{1+} \dot{u}_{1+} + \beta_1 \rho_1 \cos^2 \psi_{1+} \dot{v}_{1+} = -\alpha_1 \rho_1 \sin \theta_{1-} \cos \theta_{1-} \dot{u}_{1-}; \\
& \alpha_2 \rho_2 \sin \theta_{2+} \cos \theta_{2+} \dot{u}_{2+} - \beta_2 \rho_2 \cos^2 \psi_{2+} \dot{v}_{2+} = 0; \\
& \cos \theta_{1+} \dot{u}_{1+} - \sin \psi_{1+} \dot{v}_{1+} + \cos \theta_{2+} \dot{u}_{2+} + \sin \psi_{2+} \dot{v}_{2+} = \cos \theta_{1-} \dot{u}_{1-}.
\end{aligned} \tag{12}$$

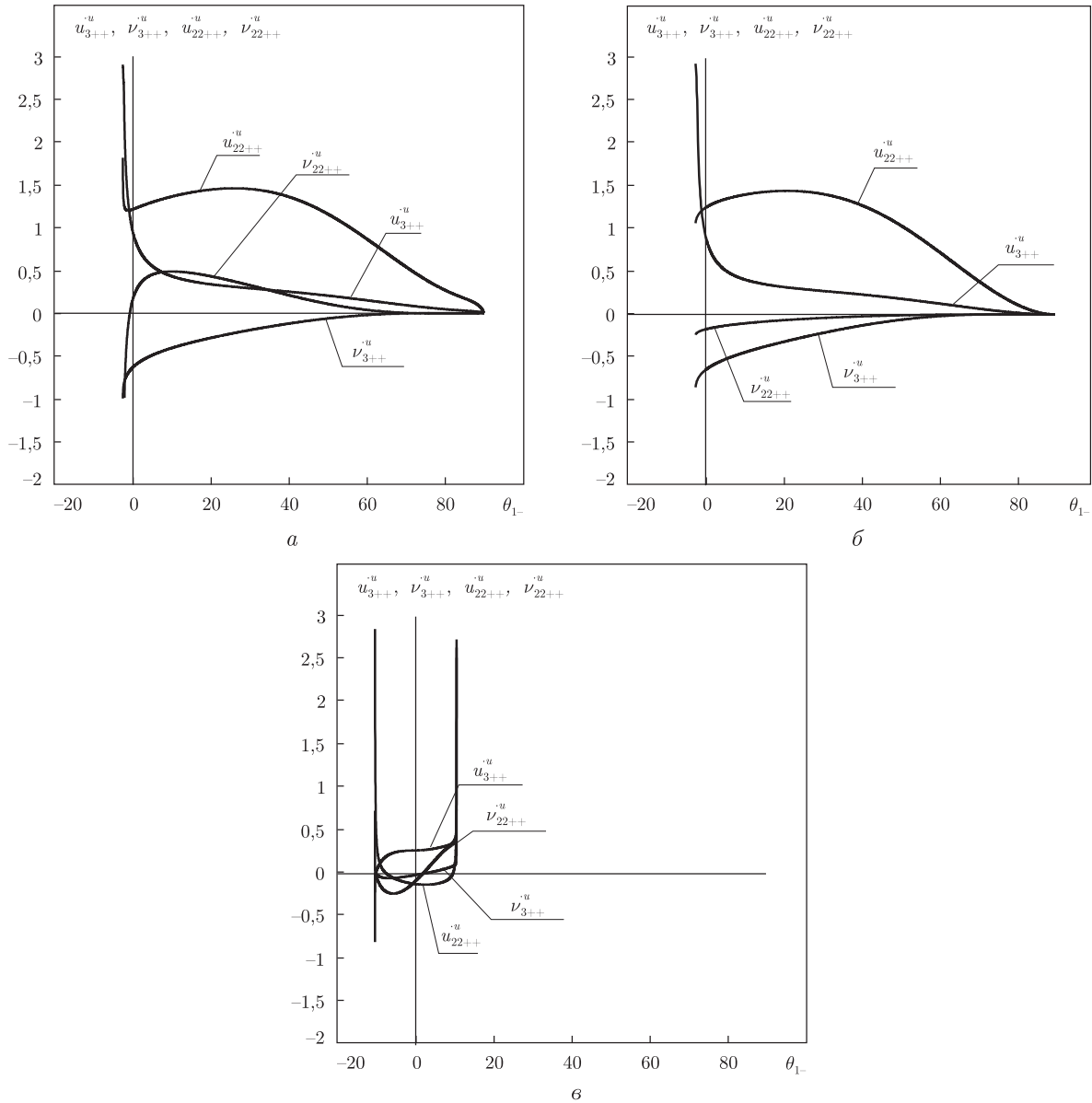


Рис. 2. Графіки інтенсивності розривних заломлених ($\dot{u}_{3++}^u, \dot{v}_{3++}^u$) і відбитих ($\dot{u}_{22++}^u, \dot{v}_{22++}^u$) хвиль на площині G_2 клиноподібного пружного тіла: *a* — середовище *I* — доломіт, середовище *II* — вугілля, контакт середовищ без проковзування; *б* — середовище *I* — доломіт, середовище *II* — вугілля, контакт середовищ з проковзуванням; *в* — середовище *I* — вугілля, середовище *II* — доломіт, контакт середовищ з проковзуванням

З її допомогою досліджена вищерозглянута система двох середовищ зі зміненими умовами їх взаємодії. Графічні результати, наведені на рис. 2, б, відповідають результатам на рис. 2, а. Вони свідчать про те, що хвиля \dot{v}_{22++}^u має значно меншу інтенсивність, в той час як інтенсивності інших хвиль залишилися практично незмінними. Якщо порядок проходження середовищ I та II поміняти місцями, то зона пропускання розривних хвиль клиноподібним включенням з доломіту істотно зменшується і виявляється рівною $-10,5^\circ < \theta_{1-} < 10,5^\circ$. Графіки інтенсивності розривних хвиль, що сформувалися на площині G_2 для цього випадку, показані на рис. 2, в. Видно, що в зоні пропускання цих хвиль їх інтенсивності мають досить малі значення, тому в даному випадку на клиноподібному включенні більш помітний ефект екранування розривних хвиль.

1. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. – Москва: Мир, 1972. – 183 с.
2. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. – Москва: Мир, 1978. – 307 с.
3. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград: Наука, 1980. – 280 с.
4. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – Киев: Наук. думка, 1988. – 220 с.
5. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. – Москва: Фазис, 1996. – 334 с.
6. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
7. Гуляев В. И., Луговой П. З., Крицкий В. Б., Иванченко Г. М. Отражение и преломление плоских разрывных волн параболическими поверхностями раздела анизотропных упругих сред // Геофизич. журн. – 2005. – 27, № 6. – С. 418–426.
8. Lugovoy P. Z., Gouliiaev V. I. Propagation of shock wave fronts in anisotropic layered media // Shock Compression of Condensed Matter / Ed. by M. D. Furnish, L. C. Chhabidas, R. S. Hixson. – Melville, NY: American Institute of Physics, USA. – 1999. – P. 1287–1290.

Національний транспортний університет, Київ
 Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
 НАН України, Київ

Надійшло до редакції 18.11.2010

V. I. Gulaev, P. Z. Lugovoy, Yu. O. Zaets'

Screening of nonstationary waves by a wedge-like elastic inclusion

The problem about propagation and screening of nonstationary waves in heterogeneous elastic media with a wedge-like inclusion is considered. On the basis of the ray method, a technique for the geometrical construction of the fronts of reflected and refracted waves on the dividing surfaces and for the calculation of their intensities is proposed. The effects of the screening for discontinuous waves by the interfaces with and without sliding between the contacting bodies are analyzed.