УДК 512.53

А. В. Жучок

Групи автоморфізмів ортогональних сум напівгруп

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

Доведено, що група автоморфізмів ортогональної суми ортогонально нерозкладних напівгруп є ізоморфною прямому добутку вінцевих добутків груп.

Одним із шляхів розв'язку задачі описання властивостей алгебраїчних систем є отримання характеристик їх груп автоморфізмів. Групи автоморфізмів різних алгебр розглядалися багатьма дослідниками. Вивчення автоморфізмів класичних груп було започатковано роботою О. Шраєра і Б. Л. Ван-дер-Вардена [1], у якій описано автоморфізми групи PSL_n $(n \geqslant 3)$ над довільним полем. Перший крок у теорії автоморфізмів над кільцями зробили Л. К. Хуа та І. Райнер [2]. Автоморфізми алгебри інцидентності скінченної квазіупорядкованої множини описані Ю. А. Дроздом та П. Колесником [3]. Вивчення автоморфізмів напівгруп набуло розвитку в роботах інших дослідників. Так, К. Д. Магілл [4] розглянув автоморфізми напівгрупи бінарних відношень, а І. Леві та Г. Вуд [5] — автоморфізми напівгруп перетворень. Описання автоморфізмів напівгруп ендоморфізмів вільного моноїда та вільної напівгрупи наведено в роботі Г. Машевицького та Б. М. Шайна [6], а напівгруп обернених матриць з невід'ємними елементами — в роботі О. І. Буніної та О. В. Михальова [7].

Ми розглядатимемо групу автоморфізмів конструкції ортогональної суми напівгруп. Вибір цієї конструкції вмотивовано тим фактом, що, як було доведено С. Богдановичем та М. Чіричем [8], кожна напівгрупа з нулем є ортогональною сумою ортогонально нерозкладних напівгруп. Розклади напівгруп в ортогональні суми вивчалися також Є. С. Ляпіним [9, 10], С. Шварцом [11]. У роботах П. С. Венкатесана [12], Т. Холла [13] охарактеризовано ортогональні суми цілком 0-простих напівгруп. Деякі типи ортогональних сум напівгруп описано Г. Лаллементом і М. Петричем [14].

У цій роботі доведено, що група автоморфізмів ортогональної суми ортогонально нерозкладних напівгруп є ізоморфною прямому добутку вінцевих добутків груп. Отриманий результат було анонсовано в [15]. Показано також, що ортогональні суми не визначаються своїми групами автоморфізмів.

1. Основні поняття та позначення. 1.1. Нехай I — напівгрупа ідемпотентів. Напівгрупу $S = S^0$ називають 0-сполукою напівгруп S_i, $i \in I$, якщо $S = \bigcup\limits_{i\in I} S_i$, $S_\alpha \bigcap S_\beta = \{0\}$ при $\alpha \neq \beta$ і для будь-яких $\alpha, \beta \in I$ має місце умова $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$. Якщо $S_\alpha \neq \{0\}$ для будь-якого $\alpha \in I$ та $S_\alpha S_\beta = \{0\}$ для будь-яких різних $\alpha, \beta \in I$, то 0-сполуку називають ортогональною сумою напівгруп S_α, $\alpha \in I$, та позначають $\overset{0}{\bigcup\limits_{\alpha\in I}} S_\alpha$.

Якщо $S = \overset{0}{\bigcup\limits_{\alpha\in I}} S_\alpha$ — ортогональна сума напівгруп S_α, $\alpha \in I$, то сімейство $D = \{S_\alpha \mid \alpha \in I\}$ називають ортогональною декомпозицією напівгрупи S, а напівгрупи S_α, $\alpha \in I$, — ортогональними компонентами напівгрупи S або компонентами в D.

Якщо D і D' — дві ортогональні декомпозиції напівгрупи $S = S^0$, то кажуть, що D є більше, ніж D', якщо кожна компонента в D є підмножиною деякої компоненти в D'.

Напівгрупу $S = S^0$ називають ортогонально нерозкладною, якщо $D = \{S\}$ є єдиною ортогональною декомпозицією напівгрупи S.

1.2. Для довільної напівгрупи T через $\operatorname{Aut} T$ будемо позначати групу автоморфізмів напівгрупи T. Якщо $\prod\limits_{i \in Y} G_i$ — прямий добуток груп G_i, $i \in Y$, $a \in \prod\limits_{i \in Y} G_i$, то через $[a]_i$ позначатимемо i-ту компоненту елемента a.

1.3. Нехай G — довільна група, X — довільна непорожня множина, $\Im[X]$ — симетрична група на множині X. Через $\overline{G} = \prod\limits_{x \in X} G_x$ позначимо прямий добуток ізоморфних копій G_x групи G, індексованих елементами множини X, та покладемо

$$\rho\colon \Im[X] \to \operatorname{Aut} \overline{G}\colon \gamma \mapsto \gamma\rho = \rho_\gamma,$$

де $\rho_\gamma((a_x)) = (a_{\gamma(x)})$ для всіх $(a_x) \in \overline{G}$. Безпосередньо перевіряється, що відображення ρ є гомоморфізмом.

На множині $\overline{G} \times \Im[X]$, визначивши операцію за правилом

$$((a_x), \gamma_1)((b_x), \gamma_2) = ((a_x)\rho_{\gamma_1}((b_x)), \gamma_1\gamma_2),$$

отримаємо групу, яку називають вінцевим добутком групи G із симетричною групою $\Im[X]$ та позначають через $G \wr \Im[X]$.

2. Автоморфізми ортогональних сум напівгруп. У роботі [8] доведено, що кожна напівгрупа з нулем є ортогональною сумою ортогонально нерозкладних напівгруп. При цьому відповідна ортогональна декомпозиція є найбільшою (див. п.1.1). Виходячи з цього результату, будемо розглядати ортогональну суму ортогонально нерозкладних напівгруп.

У цьому пункті описано автоморфізми ортогональної суми ортогонально нерозкладних напівгруп. У термінах прямих та вінцевих добутків груп досліджено структуру групи автоморфізмів цієї конструкції. Показано також, що ортогональні суми не визначаються своїми групами автоморфізмів.

2.1. Опишемо всі піднапівгрупи ортогональної суми довільних напівгруп.

Нехай $S = \overset{0}{\bigcup\limits_{i \in I}} S_i$ — ортогональна сума довільних напівгруп S_i, $i \in I$, T_i — довільна, але фіксована піднапівгрупа напівгрупи S_i, $i \in I$. Для кожного $I' \subseteq I$, $|I'| > 1$ покладемо $T_{I'} = \bigcup\limits_{i \in I'} T_i$, $T^0_{I'} = T_{I'} \bigcup \{0\}$.

Легко доводиться таке твердження.

Лема 1. *Повний список піднапівгруп ортогональної суми довільних напівгруп S_i, $i \in I$, такий:*

1) піднапівгрупи всіх напівгруп S_i, $i \in I$;

2) піднапівгрупи $T^0_{I'}$, $I' \subseteq I$, $|I'| > 1$.

2.2. Нехай $S = \overset{0}{\bigcup\limits_{i \in I}} S_i$ — ортогональна сума довільних, ортогонально нерозкладних напівгруп S_i, $i \in I$. Якщо $Y \subseteq I$ та $\{S_i\}_{i \in Y}$ — множина всіх попарно не ізоморфних напівгруп сімейства $\{S_i\}_{i \in I}$, то через K_j позначимо ортогональну суму напівгруп S_i, $i \in I$, ізоморфних напівгрупі S_j, $j \in Y$. Очевидно, що $\{K_j \mid j \in Y\}$ — ортогональна декомпозиція напівгрупи S (див. п. 1.1).

Лема 2. $\operatorname{Aut} S \cong \prod\limits_{j \in Y} \operatorname{Aut} K_j$.

Доведення. Нехай φ — автоморфізм напівгрупи S. Очевидно, що $0\varphi = 0$. Візьмемо довільну компоненту S_i, $i \in I$, напівгрупи S. Згідно з лемою 1 або $S_i\varphi = T^0_{I'}$ для деякої множини $I' \subseteq I$, $|I'| > 1$, або $S_i\varphi \subseteq S_j$ для деякого $j \in I$.

Припустимо, що $S_i\varphi = T^0_{I'}$. Оскільки напівгрупа $T^0_{I'}$ є ортогонально розкладною, то за припущенням і напівгрупа S_i, $i \in I$, є ортогонально розкладною. Але це суперечить умові ортогональної нерозкладності компонент S_i, $i \in I$, напівгрупи S. Отже, $S_i\varphi \subseteq S_j$ для деякого $j \in I$.

Зафіксуємо далі $j \in I$ та припустимо, що $S_j = \bigcup\limits_{i \in \Lambda} S_i\varphi$, де Λ — деяка підмножина множини I. Тоді з бієктивності φ випливає, що $S_i\varphi \bigcap S_k\varphi = \{0\}$ для будь-яких i, $k \in \Lambda$, $i \neq k$. При цьому для всіх $a \in S_i$, $b \in S_k$ $(i, k \in \Lambda,\ i \neq k)$ маємо:

$$a\varphi * b\varphi = (a * b)\varphi = 0\varphi = 0.$$

Це означає, що напівгрупа S_j є ортогональною сумою напівгруп $S_i\varphi$, $i \in \Lambda$. Але це знову суперечить умові ортогональної нерозкладності напівгруп S_i, $i \in I$. Отже, $S_j = S_i\varphi$ для деякого $i \in \Lambda$.

З останньої рівності та з бієктивності φ випливає, що кожний автоморфізм φ напівгрупи S однозначно визначається множиною ізоморфізмів $\varphi_i^\tau \colon S_i \to S_{i\tau}$, $i \in I$, де τ — деяка бієкція множини I.

Обернене твердження є очевидним.

Нехай далі φ — автоморфізм напівгрупи $S = \overset{0}{\bigcup\limits_{j \in Y}} K_j$, $\{\varphi_j\}_{j \in Y}$ — множина автоморфізмів φ_j напівгруп K_j, $j \in Y$. Тоді

$$s\varphi = s\varphi_j \Leftrightarrow s \in K_j, \qquad j \in Y,$$

для всіх $s \in S$.

Для зручності автоморфізм φ напівгрупи S ототожнимо з набором $\{\varphi_j\}_{j \in Y}$.

Визначимо відображення

$$\omega\colon \operatorname{Aut} S \to \prod_{j \in Y} \operatorname{Aut} K_j \colon \varphi = \{\varphi_j\}_{j \in Y} \mapsto \varphi\omega = \widetilde{\varphi},$$

де $[\widetilde{\varphi}]_j = \varphi_j$ (див. п.1.2) для всіх $j \in Y$, яке є бієктивним за побудовою.

Якщо $\xi = \{\xi_j\}_{j \in Y} \in \operatorname{Aut} S$, то $\xi\omega = \widetilde{\xi}$, а $(\varphi\xi)\omega = (\varphi\omega)(\xi\omega)$, оскільки $[\widetilde{\varphi\xi}]_j = [\widetilde{\varphi}]_j[\widetilde{\xi}]_j$ для всіх $j \in Y$. Дійсно, для довільного $s \in K_j$ матимемо

$$s(\varphi\xi) = s(\varphi\xi)_j = (s\varphi)\xi = (s\varphi_j)\xi = (s\varphi_j)\xi_j = s(\varphi_j\xi_j),$$

звідки $(\varphi\xi)_j = \varphi_j\xi_j$.

Таким чином, ω — ізоморфізм.

Лему доведено.

2.3. У позначеннях п. 2.2 для кожного $j \in Y$ покладемо $K_j = \overset{0}{\bigcup\limits_{i \in A_j}} S_i$, де $A_j \subseteq I$.

Нижченаведена теорема описує будову груп $\operatorname{Aut} K_j$, $j \in Y$, в термінах вінцевих добутків, визначених у п. 1.3.

Теорема 1. $\operatorname{Aut} K_j \cong \operatorname{Aut} S_j\ \bar{\imath}\, \Im[A_j]$, $j \in Y$.

Доведення. Згідно з лемою 2 кожний автоморфізм ψ напівгрупи K_j однозначно визначається множиною $\{\psi_i^\delta\}_{i\in A_j}$ ізоморфізмів $\psi_i^\delta\colon S_i \to S_{i\delta}$, $i \in A_j$, де δ — деяка біекція множини A_j.

Автоморфізм ψ ототожнимо з $\{\psi_i^\delta\}_{i\in A_j}$. Для всіх i, $l \in A_j$ зафіксуємо далі ізоморфізми $f^{(i,l)}\colon S_i \to S_l$, які задовольняють умову $f^{(i,l)}f^{(l,i)} = f^{(i,i)}$, де $f^{(i,i)}$ — тотожні автоморфізми, та визначимо відображення

$$\theta\colon \operatorname{Aut} K_j \to \operatorname{Aut} S_j \,\bar{\imath}\, \Im[A_j] : \psi = \{\psi_i^\delta\}_{i\in A_j} \mapsto \psi\theta = (\overline{\psi}, \delta),$$

поклавши $[\overline{\psi}]_i = f^{(j,i)}\psi_i^\delta f^{(i\delta,j)}$ для всіх $i \in A_j$ (див. п. 1.2). Покажемо, що θ — гомоморфізм.

Якщо $\lambda = \{\lambda_i^\sigma\}_{i\in A_j} \in \operatorname{Aut} K_j$ (λ визначається біекцією σ), то $\lambda\theta = (\overline{\lambda}, \sigma)$, а

$$\psi\lambda = \{\psi_i^\delta\}_{i\in A_j}\{\lambda_i^\sigma\}_{i\in A_j} = \{\mu_i^{\delta\sigma}\}_{i\in A_j} = \mu,$$

де $\mu_i^{\delta\sigma} = \psi_i^\delta\lambda_{i\delta}^\sigma$ для всіх $i \in A_j$. Тоді $\mu\theta = (\overline{\mu}, \delta\sigma)$, причому $[\overline{\mu}]_i = f^{(j,i)}\mu_i^{\delta\sigma}f^{(i\delta\sigma,j)}$, $i \in A_j$. Далі, перемножуючи $\psi\theta$ та $\lambda\theta$, отримуємо

$$(\psi\theta)(\lambda\theta) = (\overline{\psi}, \delta)(\overline{\lambda}, \sigma) = (\overline{\psi}\rho_\delta(\overline{\lambda}), \delta\sigma),$$

де

$$\begin{aligned}
&[\rho_\delta(\overline{\lambda})]_i = [\overline{\lambda}]_{i\delta}, \qquad i \in A_j,\\
&[\overline{\psi}\rho_\delta(\overline{\lambda})]_i = [\overline{\psi}]_i[\rho_\delta(\overline{\lambda})]_i = [\overline{\psi}]_i[\overline{\lambda}]_{i\delta} = f^{(j,i)}\psi_i^\delta f^{(i\delta,j)}f^{(j,i\delta)}\lambda_{i\delta}^\sigma f^{(i\delta\sigma,j)} =\\
&\qquad = f^{(j,i)}\psi_i^\delta f^{(i\delta,i\delta)}\lambda_{i\delta}^\sigma f^{(i\delta\sigma,j)} = f^{(j,i)}\psi_i^\delta\lambda_{i\delta}^\sigma f^{(i\delta\sigma,j)}, \qquad i \in A_j.
\end{aligned}$$

Порівнюючи $[\overline{\psi}\rho_\delta(\overline{\lambda})]_i$ з $[\overline{\mu}]_i$ при всіх $i \in A_j$, встановлюємо, що $(\psi\lambda)\theta = (\psi\theta)(\lambda\theta)$, звідки θ — гомоморфізм.

Нехай $\psi \neq \lambda$. Якщо $\delta \neq \sigma$, то очевидно, що $\psi\theta \neq \lambda\theta$. Припустимо, що $\delta = \sigma$. Тоді $\psi_i^\delta \neq \lambda_i^\delta$ для деякого $i \in A_j$. Це у свою чергу означає, що $f^{(j,i)}\psi_i^\delta f^{(i\delta,j)} \neq f^{(j,i)}\lambda_i^\delta f^{(i\delta,j)}$, тобто $[\overline{\psi}]_i \neq [\overline{\lambda}]_i$ для деякого $i \in A_j$ і, отже, $\psi\theta \neq \lambda\theta$.

Крім цього, для довільного елемента $(\beta, t) \in \operatorname{Aut} S_j \,\bar{\imath}\, \Im[A_j]$ існує автоморфізм $d = \{d_i^t\}_{i\in A_j} \in \operatorname{Aut} K_j$ такий, що $d_i^t = f^{(i,j)}[\beta]_i f^{(j,it)}$ для всіх $i \in A_j$. Таким чином, θ — біекція.

Теорему доведено.

2.4. З результатів пп. 2.2, 2.3 випливає основний результат роботи:

Теорема 2. *Група автоморфізмів* $\operatorname{Aut} S$ *ортогональної суми ортогонально нерозкладних напівгруп* S_i, $i \in I$, *є ізоморфною прямому добутку* $\prod_{j\in Y} \operatorname{Aut} S_j \,\bar{\imath}\, \Im[A_j]$ *вінцевих добутків груп автоморфізмів* $\operatorname{Aut} S_j$ *напівгруп* S_j *із симетричними групами* $\Im[A_j]$ *на множинах* A_j, $j \in Y$.

2.5. При вивченні груп автоморфізмів тих чи інших напівгруп природним є питання про визначуваність цих напівгруп їх групами автоморфізмів. Розглянемо це питання для ортогональної суми напівгруп.

Нехай H — клас напівгруп. Говорять, що напівгрупа $T \in H$ визначається (з точністю до ізоморфізму) групою автоморфізмів, якщо для будь-якої напівгрупи $T' \in H$ з того, що $\operatorname{Aut} T' \cong \operatorname{Aut} T$, випливає, що $T' \cong T$.

Нехай L — напівгрупа лівих нулів, $|L| = n$, $L^0 = L \bigcup \{0\}$ — напівгрупа L із зовнішньо приєднаним нулем. Очевидно, що L^0 — ортогонально нерозкладна напівгрупа (див. п. 1.1), у якої $\mathrm{Aut}\, L^0 \cong \Im[L]$, де $\Im[L]$ — симетрична група на множині L.

Нехай M — ортогональна сума n напівгруп, ізоморфних напівгрупі $T = \{a, 0\}$ з операцією $a^2 = a$, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \cdot 0 = 0$. Очевидно, що

$$\mathrm{Aut}\, M \cong \mathrm{Aut}\, T \,\bar{\wr}\, \Im[L] \cong \Im[L] \qquad \text{(див. п. 2.3).}$$

Таким чином, з ізоморфізму $\mathrm{Aut}\, L^0 \cong \mathrm{Aut}\, M$ не випливає ізоморфізм $L^0 \cong M$, а також група автоморфізмів ортогональної суми напівгруп не визначає число компонент ортогональної суми.

1. *Schreier O., van der Varden B. L.* Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 1928. – **6**. – P. 303–322.
2. *Hua L. K., Reiner I.* Automorphisms of unimodular groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1951. – **71**. – P. 331–348.
3. *Drozd Y., Kolesnik P.* Automorphisms of incidence algebras // Communs Algebra. – 2007. – **35**, No 12. – P. 3851–3854.
4. *Magill K. D.* Automorphisms of the semigroup of all relations on a set // Canad. Math. Bull. – 1966. – **9**. – P. 73–77.
5. *Levi I., Wood G. R.* On automorphisms of transformation semigroups // Semigroup Forum. – 1994. – **48**. – P. 63–70.
6. *Mashevitzky G., Schein B. M.* Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – **131**. – P. 1655–1660.
7. *Бунина Е. И., Михалев А. В.* Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. математика. – 2005. – **11**, вып. 2. – С. 3–23.
8. *Bogdanovic S., Ciric M.* Orthogonal sums of semigroups // Isr. J. Math. – 1995. – **90**. – P. 423–428.
9. *Ляпин Е. С.* Нормальные комплексы ассоциативных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1950. – **14**, № 2. – С. 179–192.
10. *Ляпин Е. С.* Полупростые коммутативные ассоциативные системы // Там же. – 1950. – **14**, № 4. – С. 367–380.
11. *Schwarz S.* On semigroups having a kernel // Čz. Math. J. – 1951. – **1 (76)**. – P. 229–264.
12. *Venkatesan P. S.* On a class of inverse semigroups // Amer. J. Math. – 1962. – **84**. – P. 578–582.
13. *Hall T.* On the natural order of $\Im$-class and of idempotents in a regular semigroups // Glasgow Math. J. – 1970. – **11**. – P. 167–168.
14. *Lallement G., Petrich M.* Decomposition I-matricielles dùne demi-groupe // J. Math. Pures et Appl. – 1966. – **45**. – P. 67–117.
15. *Zhuchok A. V.* Automorphism groups of orthogonal sums of semigroups // 6th Intern. Algebraic Conf. in Ukraine: Abstracts. – Kamenetch-Podolskiy, 2007. – P. 252.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 26.10.2010

A. V. Zhuchok

Automorphism groups of orthogonal sums of semigroups

We prove that the automorphism group of an orthogonal sum of orthogonal indecomposable semigroups is isomorphic to the direct product of wreath products of groups.