УДК 539.3

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Про одну змішану систему рівнянь типу Тимошенка коливань пластин в полярних координатах

Систему рівнянь типу Тимошенка коливань пластин в полярних координатах вперше наведено в операторній гамільтоновій формі шести рівнянь за радіальною координатою.

Застосуванню гамільтонового формалізму в теорії згинальних коливань пластин присвячені роботи [1–4]. В [2] формалізм Гамільтона реалізований у кірхгофовій теорії коливань пластин в полярних координатах в її серединній площині. Нижче систему рівнянь типу Тимошенка поперечних коливань пластин в полярних координатах вперше перетворено до змішаної системи шести рівнянь в операторній канонічній формі за радіальною координатою.

В теорії типу Тимошенка поперечних коливань тонкої пластини в полярних координатах r, θ в її серединній площині згинальні M_{rr} і $M_{\theta\theta}$ та крутильний $M_{r\theta}$ моменти, перерізуючі сили Q_r, Q_θ, прогин w і кути повороту нормалі ψ_r, ψ_θ пов'язані рівняннями коливань

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial r M_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{M_{\theta\theta}}{r} - Q_r = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2},\\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_\theta = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2},\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial r Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1}$$

і матеріальними співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&M_{rr} = -D\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r}\right)\right),\\
&M_{\theta\theta} = -D\left(\nu\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r}\right),\\
&M_{r\theta} = M_{\theta r} = -\frac{1}{2}(1-\nu)D\left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta}\right),\\
&Q_r = B_3\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \psi_r\right), \}Q_\theta = B_3\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta\right),
\end{aligned} \tag{2}$$

в яких враховані формули для деформацій. В залежностях (1), (2) ρ, E, ν, $G_{13} = G_{23} \neq 2(1-\nu)E$ — густина, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, модулі зсуву матеріалу; $D = I_1 E/(1-\nu^2)$ — згинальна жорсткість; $B_3 = k_G G_{13} h = k_G G_{23} h$ — зсувна жорсткість; k_G — коефіцієнт зсуву; h — товщина пластини; $I_1 = h^3/12$ — момент інерції поперечного перерізу на одиницю довжини.

Згідно з роботами [2, 5, 6], запишемо систему (1), (2) в операторній нормальній формі Коші за радіальною координатою r

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial rM_{rr}}{\partial r}=M_{\theta\theta}-\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}+rQ_r-\rho I_1\frac{\partial^2\psi_r}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r}=-\frac{2}{(1-\nu)D}M_{r\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}+\frac{\psi_\theta}{r},\\
&\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{Q_r}{B_3}+\psi_r,\qquad \frac{\partial\psi_r}{\partial r}=-\frac{M_{rr}}{D}-\nu\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}-\nu\frac{\psi_r}{r},\\
&\frac{\partial rM_{r\theta}}{\partial r}=-M_{r\theta}-\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial\theta}+rQ_\theta-r\rho I_1\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial rQ_r}{\partial r}=-\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}+r\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned}\tag{3}$$

Згинальний M_{rr} і крутильний $M_{r\theta}$ моменти, перерізуюча сила Q_r, прогин w і кути повороту нормалі ψ_r і ψ_θ при досконалому механічному контакті залишаються неперервними на перерізах $r=\text{const}$ розриву механічних характеристик пластини. Функції rM_{rr}, ψ_θ, w, ψ_r, $rM_{r\theta}$, rQ_r вибираємо за основні розв'язуючі функції і відповідним чином перетворимо одержану систему (3).

З цією метою з системи (3), користуючись двома невикористаними з рівнянь (1) та (2), виключаємо $M_{\theta\theta}$ і Q_θ. Виразимо згинальний момент $M_{\theta\theta}$ і перерізуючу силу Q_θ через основні розв'язуючі функції rM_{rr}, ψ_θ, w, ψ_r

$$M_{\theta\theta}=\nu M_{rr}-(1-v^2)D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}+\frac{\psi_r}{r}\right),\qquad Q_\theta=B_3\left(-\psi_\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right).\tag{4}$$

Після відповідних перетворень рівнянь (3) одержимо систему змішаних рівнянь теорії типу Тимошенка коливань пластини в полярних координатах в операторній нормальній формі Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial rM_{rr}}{\partial r}=\frac{\nu}{r}rM_{rr}-(1-v^2)D\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}-(1-v^2)D\frac{\psi_r}{r}-\rho I_1\frac{\partial^2\psi_r}{\partial t^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial rM_{r\theta}}{\partial\theta}+rQ_r,\\
&\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r}=\frac{\psi_\theta}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}-\frac{2}{(1-\nu)D}\frac{1}{r}rM_{r\theta},\\
&\frac{\partial w}{\partial r}=\psi_r+\frac{1}{rB_3}rQ_r,\qquad \frac{\partial\psi_r}{\partial r}=-\frac{1}{rD}rM_{rr}-\frac{\nu}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}-\frac{\nu}{r}\psi_r,\\
&\frac{\partial rM_{r\theta}}{\partial r}=-\frac{\nu}{r}\frac{\partial rM_{r\theta}}{\partial\theta}+(1-\nu^2)D\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta^2}-B_3r\psi_\theta-r\rho I_1\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial t^2}+B_3\frac{\partial w}{\partial\theta}+\\
&\qquad+(1-\nu^2)D\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}-\frac{1}{r}rM_{r\theta},\\
&\frac{\partial rQ_r}{\partial r}=B_3\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}+r\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-B_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}
\end{aligned}\tag{5}$$

відносно основних функцій rM_{rr}, ψ_θ, w, ψ_r, $rM_{r\theta}$, rQ_r.

Покажемо, що система (4) є операторною гамільтоновою системою [7] за просторовою координатою r

$$\frac{\partial q_i}{\partial r} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial r} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Для цього "канонічні" змінні q_i, p_i і операторну функцію Гамільтона візьмемо у вигляді

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rM_{rr} \\ \psi_\theta \\ w \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_r \\ rM_{r\theta} \\ rQ_r \end{bmatrix}, \qquad \widehat{H} = \frac{1}{2}\widehat{P}_{ij} q_i q_j + \widehat{R}_{ij} q_i p_j + \frac{1}{2}\widehat{Q}_{ij} p_i p_j, \tag{7}$$

де елементи операторних симетричних матриць $\widehat{P}_{ij}$, $\widehat{Q}_{ij}$ і ненульові елементи операторної матриці $\widehat{R}_{ij}$ мають такі значення:

$$\begin{aligned}
&-\widehat{P}_{11} = -\frac{1}{rD}, \qquad -\widehat{P}_{12} = -\widehat{P}_{21} = -\frac{\nu}{r}, \qquad -\widehat{P}_{13} = -\widehat{P}_{31} = 0, \\
&-\widehat{P}_{22} = (1-\nu^2)D\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - B_3 r - r\rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad -\widehat{P}_{23} = -\widehat{P}_{32} = B_3\frac{\partial}{\partial\theta}, \\
&-\widehat{P}_{33} = -B_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + r\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\
&\widehat{Q}_{11} = -(1-\nu^2)D\frac{1}{r} - \rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad \widehat{Q}_{12} = \widehat{Q}_{21} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \widehat{Q}_{13} = \widehat{Q}_{31} = 1, \\
&\widehat{Q}_{22} = -\frac{2}{(1-\nu)Dr}, \qquad \widehat{Q}_{23} = \widehat{Q}_{32} = 0, \qquad \widehat{Q}_{33} = \frac{1}{rB_3}, \\
&\widehat{R}_{11} = \frac{\nu}{r}, \qquad \widehat{R}_{12} = -(1-\nu^2)D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \widehat{R}_{22} = \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{8}$$

В операторному виразі (7) і виконанні диференціювання в (6) оператори (8) $\widehat{P}_{ij}$, $\widehat{Q}_{ij}$, $\widehat{R}_{ij}$ вважаються сталими величинами. В результаті такої процедури з (6) одержимо рівняння (5). Це і доводить, що система (5) є операторною гамільтоновою системою за просторовою координатою r.

Коефіцієнти системи (5), а значить і рівнянь (1), (2), можуть бути довільними функціями координати r з розривами першого роду.

Функції $M_{\theta\theta}$ і Q_θ, які не ввійшли в систему (5), визначаються через основні розв'язуючі функції за формулами (4).

Операторну гамільтонову систему (5) можна одержати з "ізохронної" варіації функціонала

$$\begin{aligned}
I(rM_{rr}, \psi_\theta, w, \psi_r, rM_{r\theta}, rQ_r) = \int_a^b \bigg\{ &\psi_r \frac{\partial (rM_{rr})}{\partial r} + (rM_{r\theta})\frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + (rQ_r)\frac{\partial w}{\partial r} - \\
&- \bigg[\frac{1}{2}\frac{1}{rD}(rM_{rr})^2 + \frac{\nu}{r}\partial_\theta (rM_{rr})\psi_\theta + \frac{1}{2}\bigg(r\rho I_1 \partial_t^2 + B_3 r - (1-\nu^2)D\frac{1}{r}\partial_\theta^2\bigg)\psi_\theta^2 - \\
&- B_3\partial_\theta\psi_\theta w + \frac{1}{2}\bigg(-r\rho h\partial_t^2 + \frac{B_3}{r}\partial_\theta^2\bigg)w^2 - \frac{1}{2}(1-\nu^2)D\frac{1}{r}\psi_r^2 - \frac{1}{r}\partial_\theta\psi_r(rM_{r\theta}) +
\end{aligned}$$

$$+\psi_r(rQ_r)-\frac{1}{2}\frac{2}{(1-\nu)D}\frac{1}{r}(rM_{r\theta})^2+\frac{1}{2}\frac{1}{rB_3}(rQ_r)^2+$$

$$+\frac{\nu}{r}(rM_{rr})\psi_r-(1-\nu^2)D\frac{1}{r}\partial_\theta\psi_\theta\psi_r+\frac{1}{r}\psi_\theta(rM_{r\theta})\Bigg]\Bigg\}dr. \qquad (9)$$

При варіюванні функціонала оператори $\widehat{P}_{ij}=\widehat{P}_{ji}$, $\widehat{Q}_{ij}=\widehat{Q}_{ji}$, $\widehat{R}_{ij}$ слід вважати замороженими (сталими) і переставними з варіаціями

$$\delta(\widehat{P}_{ij},\widehat{Q}_{ij},\widehat{R}_{ij})a_m b_n=(\widehat{P}_{ij},\widehat{Q}_{ij},\widehat{R}_{ij})(a_m\delta b_n+b_n\delta a_m)=$$

$$=\delta b_n(\widehat{P}_{ij},\widehat{Q}_{ij},\widehat{R}_{ij})a_m+\delta a_m(\widehat{P}_{ij},\widehat{Q}_{ij},\widehat{R}_{ij})b_n. \qquad (10)$$

Таким чином, в даній роботі система рівнянь типу Тимошенка коливань пластин в полярних координатах вперше перетворена до змішаної системи шести рівнянь в операторній гамільтоновій формі за радіальною координатою. При гармонічних коливаннях $f(r,\theta,t)=\operatorname{Re}f^a(r,\theta)\exp i\omega t$ ця система стає системою звичайних диференціальних рівнянь в гамільтоновій формі за просторовою координатою відносно амплітудних значень польових функцій.

1. *Шульга М. О.* О гамильтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 3–7.
2. *Шульга М. О.* Про одну змішану систему рівнянь поперечних коливань пластин в полярних координатах // Доп. НАН України. – 2011. – № 5. – С. 78–81.
3. *Шульга О. М.* Построение решений уравнений колебаний классической теории пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 109–113.
4. *Шульга О. М.* Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластины с периодическими по одной координате параметрами // Там же. – 1996. – Вып. 26. – С. 105–111.
5. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
6. *Шульга В. М.* До розв'язку рівнянь теорії пружності в циліндричних координатах // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 80–82.
7. *Павловський М. А.* Теоретична механіка. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Надійшло до редакції 19.10.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shul'ga**

About one mixed system of equations of the Tymoshenko type for vibrations of plates in polar coordinates

The system of six equations of the Tymoshenko type for vibrations of plates in polar coordinates in the operator Hamilton form in the radial coordinate is first presented.