ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

7 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 515.165.7

Д. В. Болотов

О макроскопической размерности неспиновых многообразий

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Показано, що макроскопічна вимірність універсального накриття замкненого n-вимірного ($n \geqslant 5$) неістотного цілком неспінового многовиду не перевищує $n-2$, що доводить гіпотезу Громова у цьому спеціальному випадку.

1. Расслоения и классифицирующие пространства. Рассмотрим некоторые понятия, связанные с расслоениями, используемые нами в дальнейшем.

Пусть $F \to E \to B$ — локально тривиальное расслоение с базой B, типичным слоем F и тотальным пространством E. Пусть G — структурная группа данного расслоения. Известно, что классифицировать такие расслоения с точностью до изоморфизма можно на языке отображений в классифицирующее пространство BG. А именно, каждому расслоению соответствует так называемое классифицирующее отображение $f\colon B \to BG$, причем два таких отображения гомотопны тогда и только тогда, когда соответствующие расслоения изоморфны. Напомним, что классифицирующее пространство BG зависит только от структурной группы G и определенно однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности. Например, если E — k-мерное векторное расслоение со структурной группой $O(k)$, то классифицирующим пространством будет бесконечномерное пространство Грассмана $Gr(k,\infty) = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} G(k,k+n)$, обозначаемое обычно как $BO(k)$. В ориентируемом случае, когда структурная группа редуцируется к $SO(k)$, это будет пространство ориентируемых k-мерных плоскостей $Gr^+(k,\infty)$, обозначаемое $BSO(k)$.

Можно рассматривать классы стабильной эквивалентности векторных расслоений, а именно, считать два расслоения μ и ν над B-эквивалентными, если существуют тривиальные расслоения N_1 и N_2 над B такие, что $\mu \oplus N_1 \cong \nu \oplus N_2$. В этом случае классифицирующим пространством будет пространство $BO = \lim\limits_{\to} BO(k)$ (соответственно, $BSO = \lim\limits_{\to} BSO(k)$). Например, известная теорема Уитни гласит, что любое гладкое многообразие можно реализовать, как вложенное гладкое подмногообразие в евклидовом пространстве достаточно большой размерности. Можно показать, что класс стабильной эквивалентности нормального расслоения не зависит от вложения и корректно определяет класс стабильного нормального расслоения.

Наконец, если расслоение является регулярным накрытием, в частности универсальным накрытием, то классифицирующим пространством является асферическое пространство $B\pi$, а классифицирующее отображение $f\colon B \to B\pi$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Напомним, что асферическое пространство — это пространство, чье универсальное накрытие стягиваемо. Такие пространства имеют тривиальные гомотопические группы, за исключением фундаментальной группы, т. е. являются $K(\pi, 1)$-пространствами.

2. Макроскопическая размерность. Понятие макроскопической размерности ввел М. Громов. Напомним ее определение.

Определение 1. *Макроскопическая размерность* собственного метрического пространства X не превышает k, или $\dim_{\mathrm{mc}} X \leqslant k$, если существует k-мерный полиэдр P^k и собственное непрерывное отображение $h\colon X \to P^k$ такое, что $\mathrm{Diam}(h^{-1}(p)) \leqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и произвольного $p \in P^k$. Скажем, что $\dim_{\mathrm{mc}} X = k$, если k — наименьшее из чисел, для которых выполнено $\dim_{\mathrm{mc}} X \leqslant k$.

Замечание 1. Пусть M^n — компактное риманово многообразие и классифицирующее отображение $f\colon M^n \to B\pi$ есть отображение в k-скелет[1] $B\pi^{(k)}$, тогда поднятие данного отображения до отображения универсальных накрытий $\widetilde{f}\colon \widetilde{M}^n \to E\pi^{(k)}$ в точности означает, что $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M}^n \leqslant k$. (Метрика на $\widetilde{M}^n$ предполагается поднятой из M^n.)

М. Громовым была сформулирована следующая гипотеза:

Гипотеза 1. *Если макроскопическая размерность универсального накрытия компактного риманова многообразия M^n меньше n, то она меньше $n-1$.*

М. Громов также сформулировал гомотопический аналог этой гипотезы:

Гипотеза 2. *Если классифицирующее отображение $f\colon M^n \to B\pi$ можно прогомотопировать на $B\pi^{(n-1)}$, то его можно прогомотопировать и на $B\pi^{(n-2)}$.*

Ясно, что из гипотезы 2 и замечания 1 немедленно следует гипотеза 1.

Эти гипотезы оказались верными в размерности 3 [1], и найдены контрпримеры в размерностях больше 3 [2]. Построенные контрпримеры являются спиновыми многообразиями. Именно спиновость многообразия, как показывает данная работа, является препятствием к справедливости гипотезы 2.

3. Основной результат. Прежде чем сформулировать основной результат, напомним некоторые определения.

Ориентируемое многообразие называется *спиновым*, если его касательное расслоение допускает спиновую структуру. Спиновая структура на n-мерном векторном расслоении E со структурной группой $SO(n)$ определяется следующим образом. Будем предполагать, что $n \geqslant 3$. Обозначим через $\xi_0\colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ универсальное двулистное накрытие группы Ли $SO(n)$ группой Ли $\mathrm{Spin}(n)$. Пусть $P_G(E)$ обозначает главное расслоение, соответствующее векторному расслоению E со структурной группой G. Тогда спиновой структурой на E называется главное $\mathrm{Spin}(n)$-расслоение $P_{\mathrm{Spin}}(E)$ вместе с двулистным накрытием

$$\xi\colon P_{\mathrm{Spin}}(E) \to P_{SO}(E)$$

такое, что $\xi(pg) = \xi(p)\xi_0(g)$ для всех $p \in P_{\mathrm{Spin}}(E)$ и всех $g \in \mathrm{Spin}(n)$.

Оказывается, что ориентируемое многообразие является спиновым тогда и только тогда, когда оно имеет тривиальный второй класс Штифеля–Уитни (см. [3]).

Соответственно, *неспиновым* называется многообразие, которое не является спиновым.

[1]Напомним, что i-скелетом $P^{(i)}$ клеточного комплекса P называется объединение клеток размерности, не превосходящей i.

Следуя [4], дадим следующее определение.

Определение 2. *Вполне неспиновым* многообразием назовем многообразие, у которого универсальное накрытие неспиновое. Это эквивалентно тому, что универсальное накрытие (а значит, и само многообразие) имеет нетривиальный второй класс Штифеля–Уитни.

Напомним также определение несущественного многообразия.

Согласно М. Громову, замкнутое многообразие называется *несущественным*, если классифицирующее отображение $f\colon M^n \to B\pi$ можно продеформировать в $B\pi^{(n-1)}$.

Нетрудно показать, что если M^n ориентируемо, то несущественность M^n эквивалентна условию $f_*[M^n] = 0$ (см. [5]), где $[M^n] \in H_n(M^n, \mathbb{Z})$ обозначает фундаментальный класс многообразия M^n.

Оказывается, что гипотеза 2 верна для вполне неспиновых многообразий. Цель данной работы — доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если M^n, $n \geqslant 5$, — несущественное вполне неспиновое многообразие, тогда классифицирующее отображение $f\colon M^n \to B\pi$ можно продеформировать в $B\pi^{(n-2)}$. В частности, для риманова несущественного вполне неспинового многообразия имеем $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M}^n \leqslant n-2$.*

Доказательство. Поскольку речь идет об универсальном накрытии, будем предполагать, что наше многообразие ориентируемо, переходя, если необходимо, к двулистному накрытию.

Напомним, что группа ориентируемых бордизмов $\Omega_*(X)$ пространства X состоит из классов эквивалентности пар (M, f), где M — гладкое ориентируемое многообразие, а $f\colon M \to X$ — непрерывное отображение. Пары (M, f) и (N, g) эквивалентны, если существует пара (W, F) (бордизм) такая, что $\partial W = M \coprod N$ и $F|_M = f$, а $F|_N = g$. Заметим, что если X — одноточечное пространство, то мы получим определение обычных ориентируемых бордизмов. Класс элемента (M, f) обозначим через $[M, f]$.

Выпишем точную последовательность пары для групп ориентируемых бордизмов $\Omega_*(B\pi)$:

$$\to \Omega_n(B\pi^{(n-2)}) \to \Omega_n(B\pi) \xrightarrow{j} \Omega_n(B\pi, B\pi^{(n-2)}) \to . \qquad (*)$$

Рассмотрим спектральную последовательность Атьи–Хирцебруха для относительных бордизмов $\Omega_*(B\pi, B\pi^{(n-2)})$ (см. [6]). Заметим, что для $k > 0$ имеем $\Omega_k(B\pi, B\pi^{(n-2)}) \cong \Omega_k(B\pi/B\pi^{(n-2)})$. Напомним, что член $E^2_{p,q}$ спектральной последовательности имеет вид

$$E^2_{p,q} = H_p(B\pi, B\pi^{(n-2)}; \Omega_q(*)).$$

Учитывая, что для ориентируемых бордизмов точки верны равенства $\Omega_1(*) = \Omega_2(*) = 0$ и пространство $B\pi/B\pi^{(n-2)}$ является $(n-2)$-связным, элементы E^2_{pq} записываются в виде таблицы следующим образом:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & & & & d_2 \\
 & 0 & \ldots & 0 & * & * \\
2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & * & * \\
\hline
 & & & & n{-}1 & n
\end{array}$$

Нетрудно видеть, что диагональ $p + q = n$ состоит из единственного элемента $E^2_{0n} \cong \cong E^\infty_{0n} \cong H_n(B\pi, B\pi^{(n-2)}; \Omega_0(*)) \cong H_n(B\pi, B\pi^{(n-2)}; \mathbb{Z})$. Это означает, что

$$\Omega_n(B\pi, B\pi^{(n-2)}) \cong \sum_{p+q=n} H_p(B\pi, B\pi^{(n-2)}; \Omega_q(*)) \cong H_n(B\pi, B\pi^{(n-2)}; \mathbb{Z}) \cong H_n(B\pi, \mathbb{Z}).$$

Поэтому $\Omega_n(B\pi, B\pi^{(n-2)}) \cong H_n(B\pi, \mathbb{Z})$, и для любого элемента $[P^n, h] \in \Omega_n(B\pi)$ имеем $j([P^n, h]) = h_*[P^n]$. Таким образом, если M^n несущественное, то из $(*)$ следует, что класс $[M^n, f] \in \Omega_n(B\pi)$ является образом класса $[T, g] \in \Omega_n(B\pi^{(n-2)})$. Иными словами, существует бордизм (W, F), связывающий (M^n, f) и (T, g).

В [7] авторы рассматривают группу бордизмов $\Omega_n(B\pi \times BSO)$. Обозначим через $\nu_N\colon N \to \to BSO$ классифицирующее отображение для стабильного нормального расслоения многообразия N. Тогда пары $(M^n, f \times \nu_{M^n})$ и $(T, g \times \nu_T)$ будут бордантны и в группе $\Omega_n(B\pi \times BSO)$ и соединяются бордизмом $(W, F \times \nu_W)$. Авторы отмечают, что если M^n — вполне неспиновое многообразие (а значит, таковым является и W), то бордизм $(W, F \times \nu_W)$ можно выбрать так, что $F \times \nu_W\colon W \to B\pi \times BSO$ будет 3-эквивалентностью[2]. Это, как поясняют авторы, следует из того, что ядро отображения $(F \times \nu_W)_*\colon \pi_2(W) \to \pi_2(B\pi \times BSO)$ (в отличие от ядра $F_*\colon \pi_2(W) \to \pi_2(B\pi)$) можно реализовать вложенными двумерными сферами с тривиальным нормальным расслоением, которые убиваются хирургией. Следовательно, так как сквозное отображение $F \times \nu_W \circ i$ является 2-эквивалентностью, а $F \times \nu_W\colon W \to B\pi \times BSO$ является 3-эквивалентностью, вложение $i\colon M^n \to W$ будет 2-эквивалентностью.

Теперь, так как $n \geqslant 5$, согласно основному результату [8], $i\colon M^n \to W$ будет также и геометрической 2-эквивалентностью. Это означает, что существует функция Морса $\mu\colon W \to I$ с критическими точками, находящимися внутри W, размерности, не превосходящей $n - 3$ (см. также [9]). Но это означает, что W есть след последовательных перестроек, размерности не более $n - 3$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что W гомотопически ретрагируется на $T \bigcup\limits_i D_i$, где D_i — набор приклеенных к T дисков размерности, не превосходящей $n - 2$. Пусть $r\colon W \to T \bigcup\limits_i D_i$ — деформационная ретракция, а $r'\colon T \bigcup\limits_i D_i \to W$ — гомотопически обратное к r вложение. Ясно, что композиция $Fr'r\colon W \to B\pi$ гомотопна F. Заметим, что Fr' совпадает с g на T и Fr' можно прогомотопировать на $B\pi^{(n-2)}$ по теореме о клеточной аппроксимации. Поэтому $F\colon W \to B\pi$ можно прогомотопировать на $B\pi^{(n-2)}$. Ограничение этой гомотопии на M^n дает нам гомотопию $f\colon M^n \to B\pi$ на $B\pi^{(n-2)}$. Теорема доказана.

Открытый вопрос: верна ли теорема в случае $n = 4$?

Следствие 1. *Пусть M^n — замкнутое вполне неспиновое многообразие, имеющее фундаментальную группу $\mathbb{Z}^m$ и допускающее метрику положительной скалярной кривизны, где $5 \leqslant n \leqslant 7$ и $m \geqslant n$. Тогда $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M}^n \leqslant n - 2$.*

Доказательство. Утверждение 4.3 из работы [4] гласит, что многообразие, удовлетворяющее условию теоремы, должно быть несущественным. Поэтому результат немедленно следует из основной теоремы.

Автор выражает благодарность дирекции Института высших научных исследований (Франция), где была выполнена работа, а также проф. А. А. Борисенко за внимание к работе и полезные замечания.

[2]Отображение, индуцирующее изоморфизм первых $k - 1$ гомотопических групп и эпиморфизм k-й гомотопической группы, называется k-эквивалентностью.

1. *Bolotov D.* Macroscopic dimension of 3-manifolds // Math. Physics, Analysis and Geometry. – 2003. – **6**. – P. 291–299.
2. *Bolotov D.* Gromov's macroscopic dimension conjecture // Algebraic and Geometric Topology. – 2006. – **6**. – P. 1669–1676.
3. *Lawson H. B., Michelson M. L.* Spin geometry // Princeton Mathematical Series. 38. – Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1989. – 427 p.
4. *Chang S.* Positive scalar curvature of totally nonspin manifolds // Proc. AMS. – 2010. – **138**, No 5. – P. 1621–1632.
5. *Bolotov D., Dranishnikov A.* On Gromov's scalar curvature conjecture // Ibid. – 2010. – **138**, No 4. – P. 1517–1524.
6. *Коннер П., Флойд Э.* Гладкие периодические отображения. – Москва: Мир, 1969. – 339 с.
7. *Rosenberg J., Stolz S.* A "stable" version of the Gromov–Lawson conjecture // Contemp. Math. – 1995. – **181**. – P. 405–418.
8. *Wall C. T. C.* Geometrical connectivity I // London Math. Soc. – 1971. – **2**. – P. 597–604.
9. *Милнор Дж.* Теорема об h-кобордизме. – Москва: Мир, 1969. – 115 с.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 15.10.2010

D. V. Bolotov

On the macroscopic dimension of nonspin manifolds

We prove that the macroscopic dimension of the universal covering of a closed n-dimensional ($n \geqslant 5$) inessential totally nonspin manifold is less or equal to $n-2$ that confirms the Gromov's conjecture in this special case.