УДК 519.6

О. М. Литвин, Л. С. Лобанова

Про один метод побудови точних розв'язків крайової задачі для диференціального рівняння еліптичного типу в областях складної форми

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Досліджується метод побудови точних розв'язків еліптичних крайових задач для областей складної форми. В основі методу лежать оператори сплайн-інтерлінації функцій двох змінних на системі прямих інтерлінації, паралельних осям координат.

Як відомо, загальний метод побудови функцій, які задовольняють неоднорідні граничні умови Діріхле, Неймана та мішані, може бути реалізований за допомогою R-функцій, запропонованих В. Л. Рвачовим [1–3]. Але, як відзначається у роботі [4], при використанні структурного методу із застосуванням R-функцій виникають певні проблеми: проблема продовження слідів функцій і їх нормальних похідних з границі у внутрішні точки області інтегрування зі збереженням класу диференційовності; проблема кутових точок; проблема зміни типу граничних умов у деяких довільних точках границі; проблема побудови структур наближених розв'язків із заданими слідами на лініях, якщо кілька з них перетинаються в одній точці тощо, які можуть бути успішно розв'язані за допомогою методів, що базуються на інтерлінації функцій двох змінних, інтерфлетації функцій трьох або більше змінних [4, 5].

У роботах [6, 7] запропоновано загальний метод побудови функцій двох змінних із заданими слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих, які задовольняють задані граничні умови на границях областей складної форми, обмежені дугами відомих кривих. Метод істотно використовує оператори сплайн-інтерлінації функцій двох змінних. Нижче пропонується загальний метод побудови точних розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку в областях складної форми. Необхідність вирішення такої задачі виникає при розробці нових чисельних методів розв'язання крайових задач для областей складної форми, коли тестування запропонованого методу бажано проводити не тільки на реальних задачах, для яких точний розв'язок невідомий, але також і на тестових задачах, для яких відомий точний розв'язок і можливе проведення аналізу похибки наближення. Розглянуто приклад для рівняння Пуассона у випадку, коли область інтегрування мала форму "кутка".

Постановка задачі. В даній роботі метод сплайн-інтерлінації функції двох змінних застосовується для побудови і дослідження точних розв'язків неоднорідних граничних задач для диференціального рівняння еліптичного типу:

$$Lu = f(x,y), \qquad (x,y) \in D,$$

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + c(x,y)u, \tag{1}$$

$$u(x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \partial D. \tag{2}$$

Теорема 1. *Нехай права частина диференціального рівняння* (1) $f(x,y) = LU(x,y)$, *де* $U(x,y) = U(x,y,\{\varphi_{k,p}(x)\},\{\psi_{l,q}(y)\},\{u_{k,l,p,q}\})$ *визначається відповідною формулою інтерлінації в кожному з елементів (прямокутних, прямокутних з однією криволінійною, взагалі кажучи, стороною, яка належить границі області інтегрування, трикутних, трикутних з однією криволінійною, взагалі кажучи, гіпотенузою, яка належить границі області інтегрування) розбиття області інтегрування* D *прямими* $x = x_k$, $y = y_l$ $(k = \overline{0,m},\ l = \overline{0,n})$. *Тоді існують такі функції* $\varphi_{k,p}(x)$, $\psi_{l,q}(y)$, $k = \overline{0,n}$, $l = \overline{0,m}$, $0 \leqslant p,\ q \leqslant r$ *та сталі* $u_{k,l,p,q}$ $(k = \overline{0,m},\ l = \overline{0,n},\ p,q = \overline{0,r})$, *при яких* $U(x,y) \in C^{r,r}(D)$, $r \geqslant 1$, *і є точним розв'язком крайової задачі із вказаною правою частиною та граничними умовами Діріхле або Неймана, або мішаними граничними умовами. Залежно від типу граничних умов і від значення* r *функції* $\varphi_{k,p}(x)$, $\psi_{l,q}(y)$, $0 \leqslant p,\ q \leqslant r$, *що відповідають границі області інтегрування, вибираються рівними заданим граничним функціям.*

Опис методу. Припустимо, що область D є прямокутним багатокутником і може бути поділена на прямокутні елементи $\Pi_{i,j} = \{(x,y)\colon x_i \leqslant x < x_{i+1};\ y_j \leqslant y < y_{j+1}\}$ прямими $x = x_i$, $i = \overline{0,m}$; $y = y_j$, $j = \overline{0,n}$. Розв'язок задачі (1)–(2) $u(x,y)$ в кожному прямокутнику $\Pi_{i,j} \subset D$ будемо шукати у вигляді

$$u(x,y) = u_{i,j}(x,y) = \sum_{k=i}^{i+1}\sum_{p=0}^{1}\varphi_{k,p}(x)h_{k,p}(y) + \sum_{l=j}^{j+1}\sum_{q=0}^{1}\psi_{l,q}(y)H_{l,q}(x) -$$
$$-\sum_{k=i}^{i+1}\sum_{p=0}^{1}\sum_{l=j}^{j+1}\sum_{q=0}^{1}u_{k,l,p,q}H_{l,q}(x)h_{k,p}(y), \qquad (x,y) \in \Pi_{i,j} \subset D, \tag{3}$$

$H_{l,q}(x)$, $h_{k,p}(y)$ — кубічні сплайни з властивостями:

$$H_{l,q}^{(qq)}(x_{ll}) = \delta_{l,ll}\delta_{q,qq}, \qquad l,ll \in \{i,i+1\}, \qquad q,qq \in \{0,1\},$$
$$h_{k,p}^{(pp)}(y_{kk}) = \delta_{k,kk}\delta_{p,pp}, \qquad k,kk \in \{j,j+1\}, \qquad p,pp \in \{0,1\}$$

($\delta_{k,l}$ — символ Кронеккера). Якщо виконуються умови:

$$\varphi_{k,p}^{(q)}(x_l) = \psi_{l,q}^{(p)}(y_k) = u_{k,l,p,q},$$
$$k \in \overline{i,i+1}, \qquad l \in \overline{j,j+1}, \qquad p,q \in \{0,1\},$$

функція $u(x,y) \in C^{1,1}(D)$ і має властивості:

$$\left.\frac{\partial^q u}{\partial x^q}\right|_{x=x_l} = \psi_{l,q}(y), \qquad l = \overline{0,m}, \qquad q = \overline{0,1},$$
$$\left.\frac{\partial^p u}{\partial y^p}\right|_{y=y_k} = \varphi_{k,p}(x), \qquad k = \overline{0,n}, \qquad p = \overline{0,1},$$

незалежно від вибору функцій $\varphi_{k,p}(x)$ і $\psi_{l,q}(y)$ в інших точках інтервалу їх визначення, тобто $\varphi_{k,p}(x)$ і $\psi_{l,q}(y)$ є слідами розв'язку та його частинних похідних першого порядку на вузлових лініях $x = x_l$ $(l = \overline{0,m})$ та $y = y_k$ $(k = \overline{0,n})$, а сталі $u_{k,l,p,q}$ $(k = \overline{0,m},\ l = \overline{0,n},\ p,q = \overline{0,1})$ є значеннями шуканого розв'язку та його частинних похідних першого порядку та мішаних похідних другого порядку у вузлових точках (x_i, y_j) $(i = \overline{0,m},\ j = \overline{0,n})$.

Таким чином, формула (3) дозволяє будувати функцію двох змінних $u(x, y)$, яка зберігає потрібний клас диференційовності, задовольняє граничні умови на границі області D і є розв'язком рівняння (1), якщо $f(x, y) = Lu(x, y)$.

Теорема 2. *Якщо шукати наближений розв'язок сформульованої задачі методом скінченних елементів, отримаємо точний розв'язок при умові, що в кожному елементі розбиття розв'язок шукаємо у вигляді* (3) *з невідомими* $u_{k,l,p,q}$.

Доведення. Як відомо, наближений розв'язок крайової задачі, знаходження якого методом скінченних елементів зводиться до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів $u_{k,l,p,q}$, єдиний. Крім того, згідно з лемою Сеа [5], існує така стала C, не залежна від простору U_h, що похибка наближення точного розв'язку $u(x, y)$ наближеним розв'язком u_h^*, знайденим методом скінченних елементів,

$$\|u - u_h^*\|_{W_2^n(G)} \leqslant C \inf_{v \in U_h} \|u - v\|_{W_2^n(G)} = 0.$$

Теорема доведена.

Приклад застосування запропонованого методу. Розглянемо граничну задачу

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{4}$$

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

де Ω — область, обмежена прямими, паралельними осям координат, і має форму “кутка”:

$$\Omega = \{(x, y)| a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant c_1;\ a \leqslant x \leqslant a_1, c_1 \leqslant y \leqslant d\}.$$

Поділимо область Ω на три частини

$$\Omega_1 = \{(x, y) \mid a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 = a_1,\ c = y_0 \leqslant y \leqslant y_1 = c_1\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \mid x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_0 \leqslant y \leqslant y_1\},$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) \mid x_0 \leqslant x \leqslant x_1,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2 = d\}$$

і введемо позначення

$$u(x, y)|_{y=y_k} = \varphi_{k,0}(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_k} = \varphi_{k,1}(x), \qquad k = \overline{0, 2},$$

$$u(x, y)|_{x=x_l} = \psi_{l,0}(y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_l} = \psi_{l,1}(y), \qquad l = \overline{0, 2},$$

$$\mathrm{H}_{i,0}(x) = (x - x_{i+1})^2 \left[\frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} + \frac{2(x_i - x)}{(x_i - x_{i+1})^3}\right], \tag{6}$$

$$\mathrm{H}_{i,1}(x) = (x - x_{i+1})^2 \frac{x - x_i}{(x_i - x_{i+1})^2}, \tag{7}$$

$$\mathrm{H}_{i+1,0}(x) = (x - x_i)^2 \left[\frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^2} + \frac{2(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)^3}\right], \tag{8}$$

$$\mathrm{H}_{i+1,1}(x) = (x - x_i)^2 \frac{x - x_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2}. \tag{9}$$

Для відрізку $[x_0, x_1]$ у формулах (6)–(9) покладаємо $i = 0$, а для відрізку $[x_1, x_2]$ у вказаних формулах приймаємо $i = 1$.

Зазначимо, що введені функції $\mathrm{H}_{k,s}(x)$ задовольняють такі умови:

$$\mathrm{H}_{k,s}^{(p)}(x_q) = \delta_{k,q}\delta_{p,s}, \qquad p = \overline{0,1}.$$

Аналогічно визначаються функції $h_{k,s}(y)$, $k = \overline{0,2}$, $s = \overline{0,1}$, із заміною змінної x на змінну y, а вузлів x_i $(i = \overline{0,2})$, відповідно, на вузли y_j $(j = \overline{0,2})$.

Враховуючи граничну умову (5), покладаємо $\varphi_{0,0}(x) = 0$, $\varphi_{2,0}(x) = 0$, $\varphi_{1,0}(x) = 0$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$; $\psi_{0,0}(y) = 0$, $\psi_{2,0}(y) = 0$, $\psi_{1,0}(y) = 0$ при $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$.

Розв'язок задачі (4), (5) в кожній з частин Ω_1, Ω_2, Ω_3 області Ω визначаємо відповідно рівностями (10)–(12):

$$u_I(x,y) = \sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\varphi_{k,p}(x)h_{k,p}(y) + \sum_{l=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}\psi_{l,q}(y)\mathrm{H}_{l,q}(x) -$$

$$- \sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}\sum_{q=0}^{1} u^{(q,p)}(x_l, y_k)\mathrm{H}_{l,q}(x)h_{k,p}(y), \tag{10}$$

$$u_{II}(x,y) = \sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\varphi_{k,p}(x)h_{k,p}(y) + \sum_{l=1}^{2}\sum_{q=0}^{1}\psi_{l,q}(y)\mathrm{H}_{l,q}(x) -$$

$$- \sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\sum_{l=1}^{2}\sum_{q=0}^{1} u^{(q,p)}(x_l, y_k)\mathrm{H}_{l,q}(x)h_{k,p}(y), \tag{11}$$

$$u_{III}(x,y) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\varphi_{k,p}(x)h_{k,p}(y) + \sum_{l=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}\psi_{l,q}(y)\mathrm{H}_{l,q}(x) -$$

$$- \sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}\sum_{q=0}^{1} u^{(q,p)}(x_l, y_k)\mathrm{H}_{l,q}(x)h_{k,p}(y) \tag{12}$$

і функція

$$u(x,y) = \begin{cases} u_I(x,y), & (x,y) \in \Omega_1, \\ u_{II}(x,y), & (x,y) \in \Omega_2, \\ u_{III}(x,y), & (x,y) \in \Omega_3, \end{cases} \tag{13}$$

$u(x,y) \in C^1(\Omega)$, є розв'язком задачі (4), (5) при правій частині $f(x,y) = \Delta u(x,y)$, де $u(x,y)$ визначається рівністю (13).

Безпосередніми обчисленнями перевіряємо виконання граничної умови, а також умов спряження на лініях $x = x_1$, $y = y_1$, які забезпечують неперервність самої функції $u(x,y)$ та її частинних похідних першого порядку, при умові, що неперервні і диференційовні функції $\varphi_{k,s}$, $\psi_{k,s}$, $k = \overline{0,2}$, $s = \overline{0,1}$.

Функції $\varphi_{k,s}$, $\psi_{k,s}$, $k,s = \overline{0,2}$, можна взяти у вигляді кубічних ермітових сплайнів. На рис. 1 наведено графік отриманого запропонованим методом точного розв'язку задачі (4), (5).

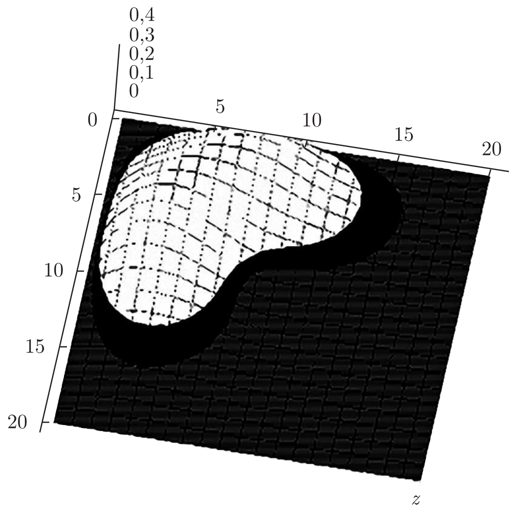

Рис. 1

Таким чином, в роботі запропоновано загальний метод побудови і дослідження точних розв'язків неоднорідних граничних задач для диференціального рівняння еліптичного типу в областях складної форми. При цьому точний розв'язок може належати потрібному класу диференційовності і задовольняти граничні умови.

У подальшому автори планують застосувати запропонований метод для побудови точних розв'язків в областях складної форми з криволінійними границями, а також поширити його на випадок тривимірних областей.

1. *Рвачев В. Л.* Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техніка, 1967. – 212 с.
2. *Рвачев В. Л.* К вопросу о построении координатных последовательностей // Диф. уравнения. – 1970. – № 6. – С. 1034–1047.
3. *Рвачев В. Л.* Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 566 с.
4. *Литвин О. М.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В. Л. Рвачова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 1–22.
5. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
6. *Гулік Л. І.* Точне задоволення умов Діріхле на границі тривимірної області складної форми за допомогою інтерфлетації // Тези доп. міждерж. науково-методичної конф. (26–28 травня 2004 р., Дніпродзержинськ). – С. 14–15.
7. *Гулік Л. І., Литвин О. М.* Точне задоволення граничних умов для тривимірної області складної форми за допомогою інтерфлетації // Праці міжнар. конф. "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXII)", 19–23 вересня 2005 р., с. Кацивелі (Крим). – С. 66.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
Надійшло до редакції 29.09.2010

O. M. Lytvyn, L. S. Lobanova

About one method of construction of exact solutions of a boundary-value problem for a differential equation of elliptic type in the areas of complicated forms

The method of construction of exact solutions of elliptic boundary-value problems is investigated for the areas of complicated forms. The method is based on the operators of spline-interlineation of functions of two variables on the system of lines parallel to the coordinate axes.