УДК 539.3

Т. Л. Ефимова

Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных пластин из градиентных материалов

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Досліджується задача про вільні коливання прямокутних пластин з градієнтного матеріалу в рамках класичної теорії. Зміна механічних параметрів відбувається вздовж одного з координатних напрямків. Для розв'язування даної задачі використовується чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації, а також методу колокації, дискретної ортогоналізації разом з методом покрокового пошуку.

Градиентные композиционные материалы с произвольно плавно меняющимися в заданном направлении механическими свойствами могут быть использованы в машиностроении, радиопромышленности, приборостроении, медицине и т. д. В таких материалах изменение механических параметров происходит без каких-либо переходных слоев и границ раздела, причем физические свойства можно регулировать, задавая необходимое распределение модуля упругости в каком-либо из направлений. При создании к градиентным полимерным материалам выдвигается ряд требований: поведение материала во всех градиентных зонах должно быть упругим с широким рабочим интервалом температур, в котором сохраняется градиент свойств [1–3]. Общие задачи теории упругости тел из гипотетических градиентных материалов рассмотрены в работах [4, 5]. Исследование свободных колебаний прямоугольных пластин развивалось достаточно активно и нашло отражение в ряде публикаций, подробный обзор которых приведен в работах [6, 7], однако для пластин с различными условиями закрепления торцов и с переменными свойствами вдоль некоторого направления, что свойственно упругим телам из градиентных материалов, таких исследований мало.

В настоящем сообщении для изучения свободных колебаний прямоугольных пластин из градиентных материалов на основе классической теории Кирхгоффа–Лява применяется метод сплайн-коллокации, предложенный ранее [7].

Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат прямоугольную ортотропную пластину ($0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $-h/2 \leqslant z \leqslant h/2$, координатная плоскость xOy является серединной плоскостью пластины).

Задача формулируется в рамках теории Кирхгоффа–Лява. Уравнения колебаний запишутся в виде

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \rho h \omega^2 w = 0, \qquad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \qquad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y, \tag{1}$$

где t — время; w — прогиб пластины; ω — круговая частота свободных колебаний; $\rho(x, y)$ — плотность материала.

Для моментов M_x, M_y, M_{xy} и перерезывающих усилий Q_x и Q_y выполняются соотношения:

$$M_x = -\left(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad M_y = -\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$
$$M_{xy} = -2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что градиент материала пластины направлен вдоль прямой $y = kx$ (k — угловой коэффициент прямой), при этом жесткостные характеристики пластины $D_{ij} = D_{ij}(x, y)$ в соотношениях (2) определяются по формулам:

$$D_{ij} = \frac{B_{ij}(x,y)h^3}{12}, \qquad B_{11}(x,y) = \frac{E_1(x,y)}{1-\nu_1(x,y)\nu_2(x,y)},$$
$$B_{22}(x,y) = \frac{E_2(x,y)}{1-\nu_1(x,y)\nu_2(x,y)}, \qquad B_{66}(x,y) = G_{12}(x,y), \tag{3}$$
$$B_{12}(x,y) = \frac{\nu_1 E_2(x,y)}{1-\nu_1(x,y)\nu_2(x,y)} = \frac{\nu_2(x,y)E_1(x,y)}{1-\nu_1(x,y)\nu_2(x,y)}.$$

Из уравнений (1), (2) получим эквивалентное уравнение относительно прогиба

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial D_{11}}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2\frac{\partial D_{22}}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} +$$
$$+ 2\left(\frac{\partial D_{12}}{\partial y} + 2\frac{\partial D_{66}}{\partial y}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2\left(\frac{\partial D_{12}}{\partial x} + 2\frac{\partial D_{66}}{\partial x}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\frac{\partial D_{66}}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} +$$
$$+ \rho h \omega^2 w = 0. \tag{4}$$

На краях пластины задаются граничные условия, которые выражаются через прогиб. Для краев пластини $y = 0$, $y = b$ возможны такие граничные условия:

1) контур жестко закрепленный при $y = \mathrm{const}$

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \tag{5}$$

2) контур шарнирно опертый при $y = \mathrm{const}$

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{6}$$

Аналогичные граничные условия задаются при $x = 0$, $x = a$. Уравнение (4) вместе с соответствующими граничными условиями на краях пластини $y = \mathrm{const}$ и $x = \mathrm{const}$ представляет собой двумерную краевую задачу на собственные значения.

Метод решения. Для решения двумерной задачи на собственные значения применим метод сплайн-апроксимации. Прогиб представим в виде

$$w(x,y) = \sum_{i=0}^{N} w_i(x)\varphi_i(y), \tag{7}$$

где $w_i(x)$ — неизвестные функции; $\varphi_i(y)$ $(i = 0,\ldots,N)$ — линейные комбинации B-сплайнов пятого степеня на равномерной сетке, которые удовлетворяют заданным граничным условиям на краях $y = \mathrm{const}$.

Подставляя выражение (7) в разрешающее уравнение (4) и граничные условия, требуем, чтобы уравнения точно выполнялись в $\overline{N} = N + 1$ точках коллокации $\xi_k \in [0, L]$, $k = \overline{0, N}$. Выбор точек коллокации детально описан в работе [1]. В результате получим одномерную краевую задачу, которую можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\overline{Y}}{dx} = A(x,\omega)\overline{Y},\\ &B_1\overline{Y} = \overline{0} \qquad \text{для} \qquad x = 0,\\ &B_2\overline{Y} = \overline{0} \qquad \text{для} \qquad x = a, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\overline{Y} = \{w, w', w'', w'''\}$; $\overline{w} = \{w_0, w_1, \ldots, w_N\}$; $\overline{w} = \{w'_0, w'_1, \ldots, w'_N\}$; $\overline{w''} = \{w''_0, w''_1, \ldots, w''_N\}$; $\overline{w'''} = \{w'''_0, w'''_1, \ldots, w'''_N\}$; A — квадратная матрица порядка $4(N+1) \times 4(N+1)$; B_1 и B_2 — прямоугольные матрицы граничних условий порядка $2(N+1) \times 4(N+1)$. Одномерная краевая задача (8) на собственные значения решалась устойчивым численным методом дискретной ортогонализации совместно с использованием метода пошагового поиска [7].

Решение задачи. Анализ результатов. Для оценки точности и достоверности результатов расчетов по предложенной методике сравнивались безразмерные частоты $\varpi = \dfrac{a^2\omega}{\pi^2}\sqrt{\dfrac{\rho h}{D}}$ свободных колебаний квадратных со стороной a изотропных шарнирно опертых пластин, полученные аналитически и при помощи метода сплайн-коллокации (МСК) для различного числа точек коллокации $\overline{N}$ (табл. 1). Для указанных пластин исходное уравнение (4) упрощается и сводится к виду

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + h\rho\frac{\omega^2}{D}w = 0. \tag{9}$$

В данном случае возможно представление прогиба в виде

$$w = \widetilde{w}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}, \tag{10}$$

Таблица 1

ϖ	Аналитическое решение	МСК, $\overline{N} = 10$	МСК, $\overline{N} = 20$	МСК, $\overline{N} = 30$
ϖ_1	2,0	1,96	1,98	1,99
ϖ_2	5,0	4,96	4,98	4,99
ϖ_3	5,0	5,25	5,15	5,03
ϖ_4	8,0	8,21	8,13	8,04
ϖ_5	10,0	10,13	10,09	10,05

Таблица 2

$\overline{\omega}$	Градиентный профиль	Усредненный модуль Юнга	Градиентный профиль	Усредненный модуль Юнга
$\overline{\omega}_1$	81,14	79,84	61,32	62,50
$\overline{\omega}_2$	183,27	180,12	155,89	156,28
$\overline{\omega}_3$	190,76	186,34	157,00	156,56

которое приводит к формуле для вычисления безрозмерных частот

$$\overline{\omega} = k^2 + m^2. \tag{11}$$

Из анализа частот, приведенных в табл. 1, можно сделать вывод о возможности применения данной методики на указанном классе задач.

Применение данной методики для расчета частот свободных колебаний прямоугольных пластин с изменяющимися за счет изменения толщины пластины упругими параметрами D_{ij} изучалось в работе [7].

В табл. 2 приведены частоты $\overline{\omega} = a^2\omega\sqrt{\rho_{\text{ср}}h_0/D_0}$ свободных колебаний для пластины из полимерных функционально градиентных материалов с градиентным профилем, соответствующим квадратичному закону изменения модуля Юнга $E = ar^2 + br + c$ [3], при этом $E(0) = 243$ МПа, $E(a/2) = 150$ МПа, $E(a) = 110$ МПа, $a = 106$ МПа, $b = -239$ МПа, $c = 243$ МПа, а усредненный по направлению градиента модуль Юнга $E_{\text{ср}} = 156{,}83$ МПа. Коэффициент Пуассона выбирался равным $\nu = 0{,}4$, что связано с небольшим различием коэффициентов Пуассона образующих полимерных материалов. Плотность градиентного материала рассматривали постоянной и равной усредненному значению $\rho_{\text{ср}}$ по толщине. Рассматривались граничные условия двух типов: I — пластина жестко защемлена по краям; II — пластина шарнирно оперта по краям. В табл. 2 также приведены частоты колебаний однородных изотропных пластин с усредненным модулем Юнга. Сравнение соответствующих частот показывает небольшое их отличие для пластины из градиентного материала и изотропного материала с усредненным модулем Юнга.

1. *Аскадский А. А.. Голенева Л. М., Бычко К. А. и др.* Градиентные полимерные материалы // Рос. хим. журн. – 2001. – **14**, № 3. – С. 123–128.
2. *Бровко А. А., Горбач Л. А., Сергеева Л. М.* Вязкоупругие свойства и моделирование процесса формирования полиуретан-полиакрилатных градиентных взаимопроникающих полимерных сеток // Полімер. журн. – 2009. – **31**, № 4. – С. 299–310.
3. *Сергеева Л. М., Горбач Л. А.* Градиентные взаимопроникающие полимерные сетки: получение и свойства // Усп. химии. – 1996. – **65**, № 4. – С. 367–376.
4. *Кашталян М. Ю., Рущицкий Я. Я.* Общее представление решений Хойля–Янгдала в линейной неоднородной изотропной теории // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 1. – С. 3–21.
5. *Кашталян М. Ю., Рущицкий Я. Я.* Общее представление решения Лява в линейной неоднородной трансверсально-изотропной теории упругости // Там же. – 2010. – **46**, № 2. – С. 3–14.
6. *Кашталян М. Ю., Рущицкий Я. Я.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
7. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л.* Применение метода сплайн-апроксимации для решения задач о свободных колебаниях прямоугольных пластин переменной толщины // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 10. – С. 90–99.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 22.07.2010

T. L. Efimova

Investigation of free vibrations of rectangular plates made from gradient materials

A problem of natural vibrations of rectangular plates made from functionally gradient materials is studied on the base of classical theory. The mechanic parameters vary along the coordinate x. Using the methods of spline-approximation and collocation, the problem is solved by the steady-state numerical method of discrete orthogonalization with incremental search.