

Академик НАН Украины В. Д. Кубенко, В. В. Гавриленко,  
Д. В. Тарлаковский

## Действие нестационарной нагрузки на поверхность упругой полосы

*Нестационарне напруження раптово прикладене до поверхні пружної полоси при певних спеціальних граничних умовах на її бокових поверхнях. Необхідно побудувати розв'язок сформульованої нестационарної граничної задачі і визначити напружено-деформівний стан смуги. Розв'язок задачі реалізується за допомогою інтегрального перетворення Лапласа і розкладів в ряди Фур'є. Як результат отримано точні вирази для нормального напруження і переміщення.*

Данная работа посвящена развитию подхода к исследованию деформирования упругих тел (в данном случае — упругой полубесконечной полосы) при нестационарном воздействии, приложенном к части поверхности тела. Отметим, что динамическая теория упругости достаточно интенсивно развивается в последние два–три десятилетия благодаря практической актуальности, присущим особенностям физического процесса и интересным особенностям поиска решений соответствующих краевых задач. Большую популярность приобрела нестационарная контактная задача теории упругости [1–3]. В общем случае задача удара тела об упругую среду или элемент конструкции формулируется как нестационарная смешанная начально-краевая задача теории упругости с неизвестной изменяющейся во времени границей. Однако не менее интересными и важными с точки зрения построения аналитических решений являются задачи определения напряженно-деформированного состояния упругих тел при действии нестационарной нагрузки. Построить аналитическое решение удастся лишь для некоторых специальных способов задания условий на торце полосы, в частности — смешанных условий. Тем не менее, кроме самостоятельной значимости, аналитические решения актуальны также в связи с возможностью обрабатывать с их помощью различные численные подходы.

Ниже дана формулировка и предложен способ решения задачи определения напряженно-деформированного состояния упругой полубесконечной полосы при действии нестационарной нагрузки на ее торце. Используются интегральное преобразование Лапласа и разложения в ряды Фурье. В результате получены аналитические выражения для напряжений и перемещения.

1. Рассматривается плоская нестационарная задача теории упругости для полубесконечной полосы шириной  $l$ . Отнесем полосу к декартовым координатам  $x, z$ , так что ось абсцисс направлена вдоль свободной поверхности, ось ординат — в глубь полосы (рис. 1).

В момент времени  $t = 0$  к торцевой поверхности  $z = 0$  прикладывается нестационарная нагрузка, так что нормальное напряжение  $\sigma_{zz}$  задается функцией

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = Q(x, t). \quad (1)$$

Кроме того, на торцевой поверхности отсутствует перемещение  $u_x$ :

$$u_x|_{z=0} = 0. \quad (2)$$

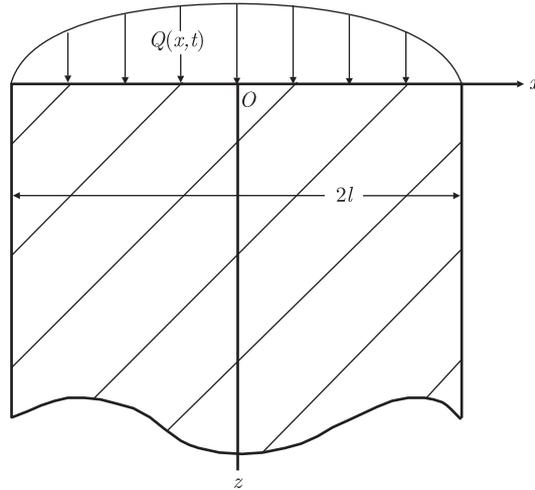


Рис. 1. Система координат

Заметим, что смешанные условия (1), (2) на торце несколько специфичны (так называемые условия скользящего контакта), однако, как будет видно из дальнейшего, их использование позволяет получить эффективное аналитическое решение.

Для общности формулировки задачи введем безразмерные обозначения

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R}; \quad \bar{u}_j = \frac{u_j}{R}; \quad \bar{t} = \frac{c_0 t}{R}; \quad \bar{w} = \frac{w}{R}; \quad \bar{M} = \frac{M}{\gamma R^2}; \\ \bar{\sigma}_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{K}; \quad c_0 = \sqrt{\frac{K}{\gamma}}; \quad \alpha = \frac{c_p}{c_0}; \quad \beta = \frac{c_s}{c_0}; \quad b = \frac{\beta}{\alpha}; \quad j, k = x, z, \end{aligned} \quad (3)$$

причем ниже черта над обозначениями будет опущена. Здесь  $R$  — некоторый характерный линейный размер;  $c_p, c_s$  — соответственно скорости распространения волн расширения и волн сдвига в полосе [4];  $\gamma$  — плотность материала;  $K$  — его модуль всестороннего сжатия;  $\sigma_{jk}$  — компоненты напряженного состояния;  $\bar{u}_j$  — компоненты вектора перемещений. Напомним, что скорости волн расширения и сдвига и модуль всестороннего сжатия определяются через упругие постоянные Ламе посредством формул

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}.$$

Вследствие приложения динамической нагрузки к поверхности тела в нем инициируется распространение упругих волн. Поведение упругой среды при этом описывается скалярными волновыми потенциалами  $\Phi$  и  $\Psi$ , которые в случае плоской задачи удовлетворяют волновым уравнениям [5]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

и связаны с упругими перемещениями и напряжениями соотношениями

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}; & u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \\ \sigma_{zz} &= (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right); \\ \sigma_{xz} &= \beta^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия на фронтальной поверхности слоя  $z = 0$  заданы условиями (1), (2). Полоса обладает конечными размерами в направлении оси  $Ox$  и должны быть также заданы граничные условия на боковых поверхностях. Примем, что ширина полосы  $l$  и на ее гранях реализуются следующие граничные условия:

$$u_z|_{|x|=l} = 0; \quad \sigma_{xz}|_{|x|=l} = 0. \quad (6)$$

Начальные условия для волновых потенциалов нулевые, так как первоначально тело находится в покое:

$$\Phi|_{t=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Psi|_{t=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

На бесконечности ( $z \rightarrow \infty$ ) возмущения должны исчезать.

Соотношения (1), (2), (4)–(7) составляют формулировку начально-краевой задачи.

**2.** Будем считать, что функция  $Q(x, t)$  раскладывается в ряд Фурье на отрезке  $-l \leq x \leq l$

$$Q(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t) \cos \bar{n}x, \quad \bar{n} = \frac{n\pi}{l}. \quad (8)$$

Ниже черта над обозначением  $\bar{n}$  будет подразумеваться. Если волновые уравнения (1) подвергнуть преобразованию Лапласа по времени с параметром  $s$ , их общее решение с учетом нулевых начальных условий можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi^L &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n(s)e^{-zP} + \tilde{A}_n(s)e^{zP}) \cos nx; \\ \Psi^L &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n(s)e^{-zS} + \tilde{B}_n(s)e^{zS}) \sin nx; \\ P &= \sqrt{\frac{s^2}{\alpha^2} + n^2}; & S &= \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + n^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $A_n, B_n, \tilde{A}_n, \tilde{B}_n$  подлежат определению из граничных условий. Соответственно трансформанта Лапласа обозначается верхним индексом  $L$ , так что

$$f^L(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt; \quad f(t) = L^{-1}[f^L(s)] = \int_{g-i\infty}^{g+i\infty} e^{zt} f^L(s) ds.$$

Из условия отсутствия возмущений на бесконечности ( $z \rightarrow \infty$ ) немедленно следует

$$\tilde{A}_n = \tilde{B}_n = 0.$$

Аналогично (8), представим перемещения и напряжения в виде рядов Фурье; в пространстве изображений по Лапласу они будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^L &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zzn}^L(s) \cos nx, & \sigma_{xz}^L &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{xzn}^L(s) \sin nx, \\ u_z^L &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}^L(s) \cos nx, & u_x^L &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{xn}^L(s) \sin nx. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что условия на боковых гранях уже выполнены. Подставляя общее решение (9) в преобразованные в пространство изображений граничные условия (1), (2) и определяя постоянные  $A_n, B_n$ , получим следующие выражения для коэффициентов соответствующих рядов Фурье (10) изображений напряжений и перемещения:

$$\begin{aligned} \sigma_{zzn}^L &= Q_n^L(s) \left[ \left( 1 + \frac{2\beta^2 n^2}{s^2} \right) e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} - \frac{2n^2 \beta^2}{s^2} e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}} \right]; \\ \sigma_{xzn}^L &= Q_n^L(s) \frac{\beta}{\alpha} \left[ 2\beta \frac{n \tilde{P}}{s^2} e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} - \alpha \frac{n \tilde{S}}{s^2} e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}} - \alpha \frac{\beta^2 n^3}{s^2 \tilde{S}} e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}} \right]; \\ u_{zn}^L &= \frac{1}{a} Q_n^L(s) \left[ -\frac{1}{\alpha} \frac{\tilde{P}}{s^2} e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} + \frac{n^2 \beta}{s^2 \tilde{S}} e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}} \right]; \\ \tilde{P} &= \sqrt{s^2 + \alpha^2 n^2}; & \tilde{S} &= \sqrt{s^2 + \beta^2 n^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Задача теперь состоит в обращении выражений (11) относительно преобразования Лапласа и выполнении вычислений.

**3.** Нетрудно убедиться, что слагаемые в квадратных скобках, содержащие множитель  $e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}}$  в каждой строке (11), описывают расходящуюся волну расширения, а содержащие множитель  $e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}}$  — волну искажения. Для конкретности займемся обращением первой строки — компонента напряжения  $\sigma_{zzn}^L$ . Данное выражение можно переписать в виде

$$\sigma_{zzn}^L = Q_n^L(s) R_{zz}^L(s, n, z), \quad (12)$$

где

$$R_{zz}^L(s, n, z) = \left( 1 + \frac{2\beta^2 n^2}{s^2} \right) e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}} - \frac{2n^2 \beta^2}{s^2} e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}}. \quad (13)$$

Оригинал выражения (12) формально легко записать в виде свертки оригиналов сомножителей [6], из которых первый известен. Для вычисления оригинала второго сомножителя представим его в виде:

$$\begin{aligned} R_{zz}^L(s, n, z) &= e^{-\frac{z}{\alpha} s} - (e^{-\frac{z}{\alpha} s} - e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}}) + \frac{2\beta^2 n^2}{s^2} e^{-\frac{z}{\alpha} s} - \frac{2\beta^2 n^2}{s^2} (e^{-\frac{z}{\alpha} s} - e^{-\frac{z}{\alpha} \tilde{P}}) - \\ &- \frac{2n^2 \beta^2}{s^2} e^{-\frac{z}{\beta} s} + \frac{2n^2 \beta^2}{s^2} (e^{-\frac{z}{\beta} s} - e^{-\frac{z}{\beta} \tilde{S}}) \end{aligned} \quad (14)$$

и воспользуемся известными табличными соотношениями между изображениями и оригиналами функций [6]

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}e^{-\frac{z}{\alpha}s}\right) = H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right)\frac{\alpha t - z}{\alpha};$$

$$L^{-1}\left(e^{-\frac{z}{\alpha}s} - e^{-\frac{z}{\alpha}\tilde{P}}\right) = H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right)\frac{nz}{\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}}J_1\left(n\alpha\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}\right);$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(e^{-\frac{z}{\alpha}s} - e^{-\frac{z}{\alpha}\tilde{P}}\right)\right] = nzH\left(t - \frac{z}{\alpha}\right)\int_{z/\alpha}^t \frac{t - \tau}{\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}}J_1\left(n\alpha\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}\right)d\tau,$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(e^{-\frac{z}{\beta}s} - e^{-\frac{z}{\beta}\tilde{P}}\right)\right] = nzH\left(t - \frac{z}{\beta}\right)\int_{z/\beta}^t \frac{t - \tau}{\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}}J_1\left(n\beta\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}\right)d\tau.$$

Здесь  $J_m(y)$  – цилиндрическая функция Бесселя  $m$ -го индекса;  $L^{-1}$  – оператор обращения преобразования Лапласа. Первое слагаемое в (14) обеспечит запаздывание оригинала  $Q_n(t)$ , т. е.

$$L^{-1}\left(e^{-\frac{z}{\alpha}s}Q_n^L(s)\right) = H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right)Q\left(t - \frac{z}{\alpha}\right). \quad (15)$$

С учетом вышеприведенного выражение для искомого нормального напряжения окончательно примет вид

$$\sigma_{zz}(x, z, t) = H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left[Q_n\left(t - \frac{z}{\alpha}\right) + \int_{z/\alpha}^t Q_n(t - \tau)R_{1zzn}(n, z, \tau) d\tau\right] -$$

$$- 2n^2\beta^2 H\left(t - \frac{z}{\beta}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\int_{z/\beta}^t Q_n(t - \tau)R_{2zzn}(n, z, \tau) d\tau \cos nz, \quad (16)$$

где

$$R_{1zzn}(n, z, \tau) = 2\beta^2 n^2 \left(\tau - \frac{z}{\alpha}\right) - \frac{nz}{\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}}J_1\left(n\alpha\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}\right) -$$

$$- 2\beta^2 n^3 z \int_{z/\alpha}^{\tau} \frac{\tau - y}{\sqrt{y^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}}J_1\left(n\alpha\sqrt{y^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}\right)dy,$$

$$R_{2zzn}(n, z, \tau) = \left[-\left(\tau - \frac{z}{\beta}\right) + nz \int_{z/\beta}^{\tau} \frac{\tau - y}{\sqrt{y^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}}J_1\left(n\beta\sqrt{y^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}\right)dy\right].$$

Аналогично строятся оригиналы для остальных компонентов напряжения и перемещения:

$$\begin{aligned} \sigma_{zx}(t, x, z) = & \frac{2\beta^2}{\alpha} H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_{z/\alpha}^t Q_n(t - \tau) R_{1zxn}(\tau, n, z) d\tau \right] \cos nz - \\ & - \beta n H\left(t - \frac{z}{\beta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{z/\beta}^t Q_n(t - \tau) R_{2zxn}(\tau, n, z) d\tau \cos nz, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} u_z(t, x, z) = & H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_{z/\alpha}^t Q_n(t - \tau) R_{1zn}(\tau, n, z) d\tau \right] \cos nz + \\ & + H\left(t - \frac{z}{\beta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{z/\beta}^t Q_n(t - \tau) R_{2zxn}(\tau, n, z) d\tau \cos nz, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} R_{1zxn}(t, z) = & \frac{2\beta^2}{\alpha} H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right) \left[ n J_0\left(n\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}\right) + \alpha^2 n^4 z \int_{z/\alpha}^t \frac{t - \tau}{\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}} J_1\left(n\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}\right) d\tau \right]; \\ R_{2zxn}(t, z) = & -\beta n H\left(t - \frac{z}{\beta}\right) \left[ J_0\left(n\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}\right) + 2\beta^2 n^3 z \int_{z/\beta}^t \frac{t - \tau}{\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}} J_1\left(n\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}\right) d\tau \right]; \\ R_{1zn}(t, z) = & -\frac{1}{\alpha} H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right) \left[ n J_0\left(n\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}\right) + \alpha^2 n^4 z \int_{z/\alpha}^t \frac{t - \tau}{\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}} J_1\left(n\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}}\right) d\tau \right]; \\ R_{2zn}(t, z) = & n^2 \beta H\left(t - \frac{z}{\beta}\right) n z \int_{z/\beta}^t \frac{t - \tau}{\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}} J_1\left(n\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}\right) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, выражения (16)–(18) дают решение поставленной задачи.

*Работа выполнена в рамках совместного украинско-российского проекта “Нестационарная динамика оболочечных конструкций на деформируемом основании”.*

1. *Механика контактных взаимодействий* / Под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. – Москва: Физматгиз, 2001. – 670 с.
2. *Кубенко В.Д.* Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 11. – С. 3–44.
3. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. – Москва: Наука; Физматгиз, 1995. – 352 с.

4. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 220 с.
5. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
6. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев  
Московский авиационный институт*

*Поступило в редакцию 30.11.2010*

Academician of the NAS of Ukraine **V. D. Kubenko, V. V. Gavrilenko,  
D. V. Tarlakovskii**

### **Action of a nonstationary load on the surface of an elastic strip**

*In the case where a nonstationary load is applied to the surface of an elastic strip, we solved the transient boundary-value problem under special boundary conditions and determined a stress-strain state of the strip and displacements with the help of the Laplace integral transformation and the Fourier expansion.*