УДК 531.38

А. В. Мазнев

Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

Отримано умови існування регулярних прецесій гіростата під дією потенційних та гіроскопічних сил у припущенні, що величина гіростатичного моменту залежить від часу. Досліджено зв'язок цих умов з умовами існування регулярних прецесій гіростата під дією сили тяжіння.

Регулярные прецессии являются рабочими режимами многих конструкций современной техники. Примером регулярной прецессии может служить движение волчка Лагранжа в поле силы тяжести [1], которое описано во многих учебниках по теоретической механике. Обзор основных результатов, полученных в динамике твердого тела в области исследования прецессий, приведен в работе [2]. В этой работе рассмотрены прецессии гиростата в случае, когда величина гиростатического момента в системе координат, связанной с гиростатом, постоянна. Поэтому изучение прецессий гиростата при условии, что величина гиростатического момента является функцией времени [3], является актуальным. В [1, 4, 5] изучены условия существования некоторых классов прецессий гиростата под действием силы тяжести. Данная работа посвящена исследованию условий существования регулярных прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом, описываемых уравнениями класса Кирхгофа [6].

Постановка задачи. Пусть момент количества движения гиростата в определении [3] выражается формулой $\overline{x} = A\overline{\omega} + \lambda(t) \cdot \overline{\alpha}$, где $\overline{\omega}$ — угловая скорость; A — тензор инерции гиростата; $\overline{\alpha}$ — неизменный в теле-носителе единичный вектор; $\lambda(t)$ — ограниченная, дифференцируемая функция времени. Предположим, что гиростат намагничен, несет на себе электрические заряды и находится под действием электрических, магнитных, ньютоновских и лоренцевых сил. Тогда уравнения движения гиростата можно записать в виде [3, 6]

$$A\dot{\overline{\omega}} = A\overline{\omega} \times \overline{\omega} - \dot{\lambda}(t) \cdot \overline{\alpha} + \overline{\omega} \times (B\overline{\nu} - \lambda(t) \cdot \overline{\alpha}) + \overline{\nu} \times (C\overline{\nu} - \overline{s}), \tag{1}$$

$$\dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu} \times \overline{\omega}. \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) приняты обозначения: $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела-носителя; $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; A — тензор инерции гиростата с компонентами A_{ij} [3]; $\overline{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — единичный вектор, характеризующий гиростатический момент $\overline{\lambda}(t) = \lambda(t) \cdot \overline{\alpha}$; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ — постоянные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\overline{\nu}$, $\overline{\omega}$, $\lambda(t)$ обозначает относительную производную по времени.

Уравнения (1), (2) имеют интегралы

$$\overline{\nu} \cdot \overline{\nu} = 1, \qquad (A\overline{\omega} + \lambda(t)\overline{\alpha}) \cdot \overline{\nu} - \frac{1}{2}(B\overline{\nu} \cdot \overline{\nu}) = k, \tag{3}$$

где k — произвольная постоянная.

Пусть подвижная система координат связана с вектором $\overline{a}$ следующим образом: $\overline{a} = (0, 0, 1)$. Тогда регулярную прецессию гиростата можно задать с помощью инвариантных соотношений [2]

$$\overline{a} \cdot \overline{\nu} = a_0, \qquad \overline{\omega} = n\overline{a} + m\overline{\nu}. \tag{4}$$

В формулах (4) вектор $\overline{\nu}$ имеет компоненты

$$\nu_1 = a_0' \sin nt, \qquad \nu_2 = a_0' \cos nt, \qquad \nu_3 = a_0 \qquad (a_0 = \cos\theta_0,\ a_0' = \sin\theta_0), \tag{5}$$

а величины n и m постоянны. Последние определяют скорости собственного вращения и прецессии гиростата.

Отметим, что подстановка величин (5) и $\overline{\omega}$ из (4) в уравнение (2) приводит к тождеству, что означает: интегрирование уравнения (2) выполнено. Поэтому внесем выражение $\overline{\omega}$ из (4) в уравнение (1)

$$\dot{\lambda}(t)\overline{\alpha} + nm[Sp(A)(\overline{\nu} \times \overline{a}) - 2(A\overline{\nu} \times \overline{a})] - \lambda(t)[n(\overline{\alpha} \times \overline{a}) + m(\overline{\alpha} \times \overline{\nu})] - n^2(A\overline{a} \times \overline{a}) -$$
$$- m^2(A\overline{\nu} \times \overline{\nu}) - n(\overline{a} \times B\overline{\nu}) - m(\overline{\nu} \times B\overline{\nu}) - \overline{\nu} \times (C\overline{\nu} - \overline{s}) = \overline{0}. \tag{6}$$

При рассмотрении уравнений, которые получаются путем скалярного умножения левой части уравнения (6) на независимые векторы $\overline{a}$, $\overline{\nu}$, $\overline{a} \times \overline{\nu}$, подвижную систему координат выберем, не нарушая общности задачи, так, чтобы $\overline{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$. Получим

$$\alpha_3\dot{\lambda}(t) = a_0' m\alpha_1\lambda(t)\cos nt - P_2\cos 2nt + P_2'\sin 2nt + P_1\cos nt - P_1'\sin nt, \tag{7}$$

$$\dot{\lambda}(t)(a_0'\alpha_1\sin nt + a_0\alpha_3) + a_0' n\alpha_1\lambda(t)\cos nt - Q_2\cos 2nt + Q_2'\sin 2nt +$$
$$+ Q_1\cos nt - Q_1'\sin nt = 0, \tag{8}$$

$$a_0'\alpha_1\dot{\lambda}(t)\cos nt + a_0'\lambda(t)[m(a_0'\alpha_3 - a_0\alpha_1\sin nt) - n\alpha_1\sin nt] + R_2\cos 2nt +$$
$$+ R_2'\sin 2nt - R_1\cos nt - R_1'\sin nt + R_0 = 0. \tag{9}$$

В уравнениях (7)–(9) введены обозначения

$$P_2 = {a_0'}^2(C_{12} + mB_{12} - m^2A_{12}),$$
$$P_2' = \frac{a_{0'}^2}{2}[C_{22} - C_{11} + m(B_{22} - B_{11}) - m^2(A_{22} - A_{11})],$$
$$P_1 = a_0'(s_1 - a_0C_{13} - a_0mB_{13} + a_0m^2A_{13}),$$
$$P_1' = a_0'(s_2 - a_0C_{23} - a_0mB_{23} + a_0m^2A_{23}),$$
$$Q_2 = {a_0'}^2 n(B_{12} - 2mA_{12}),$$
$$Q_2' = \frac{{a_0'}^2}{2}n[(B_{22} - B_{11}) - 2m(A_{22} - A_{11})],$$
$$Q_1 = a_0'n[(n + 2a_0m)A_{13} - a_0B_{13}],$$
$$Q_1' = a_0'n[(n + 2a_0m)A_{23} - a_0B_{23}], \tag{10}$$

$$R_2 = \frac{{a'_0}^2}{2}[a_0(C_{22} - C_{11}) + (n + a_0 m)(B_{22} - B_{11}) - m(2n + a_0 m)(A_{22} - A_{11})],$$

$$R'_2 = {a'_0}^2[a_0 C_{12} + (n + a_0 m)B_{12} - m(2n + a_0 m)A_{12}],$$

$$R_1 = a'_0[a_0 s_2 - (2a_0^2 - 1)C_{23} - (a_0 n + (2a_0^2 - 1)m)B_{23} +$$
$$+ (n^2 + 2a_0 mn + (2a_0^2 - 1)m^2)A_{13}],$$

$$R'_1 = a'_0[a_0 s_1 - (2a_0^2 - 1)C_{13} - (a_0 n + (2a_0^2 - 1)m)B_{13} + (n^2 + 2a_0 mn + (2a_0^2 - 1)m^2)A_{23}],$$

$$R_0 = {a'_0}^2\Big[s_3 + \frac{a_0}{2}(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) + \frac{1}{2}n(B_{22} + B_{11}) +$$
$$+ \frac{1}{2}a_0 m(B_{11} + B_{22} - 2B_{33}) + mnA_{33} - \frac{a_0}{2}m^2(A_{11} + A_{22} - 2A_{33})\Big].$$

При исследовании прецессий можно использовать и интеграл моментов (3). На основании (4), (10) преобразуем его к следующему виду:

$$\lambda(t)(a'_0\alpha_1 \sin nt + a_0\alpha_3) = \frac{1}{2n}Q'_2 \cos 2nt + \frac{1}{2n}Q_2 \sin 2nt - \frac{1}{n}Q'_1 \cos nt - \frac{1}{n}Q_1 \sin nt + S_0, \quad (11)$$

где

$$S_0 = k + \frac{1}{4}[{a'_0}^2(B_{11} + B_{22}) + 2a_0^2 B_{33}] - \frac{m}{2}[{a'_0}^2(A_{11} + A_{22}) + 2a_0^2 A_{33}]. \quad (12)$$

Особый случай. Рассмотрим случай, когда интеграл моментов из (11) становится тождеством. Так как $\lambda(t) \neq 0$, то из (11) вытекают равенства

$$\alpha_1 = 0, \qquad a_0 = 0, \qquad Q'_2 = 0, \qquad Q_2 = 0, \qquad Q'_1 = 0, \qquad Q_1 = 0, \qquad S_0 = 0. \quad (13)$$

Так как $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1$, то в силу (13) из уравнения (7) следует

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2n}P_2 \sin 2nt - \frac{1}{2n}P'_2 \cos 2nt + \frac{1}{n}P_1 \sin nt + \frac{1}{n}P'_1 \cos nt + \lambda_0. \quad (14)$$

Из условий (13) на основании обозначений (10) имеем

$$A_{13} = A_{23} = 0, \qquad B_{12} = 2mA_{12}, \qquad B_{22} - B_{11} = 2m(A_{22} - A_{11}). \quad (15)$$

Поскольку при наличии ограничений (13) выражения R_2 и R'_2 из системы (10) обращаются в нуль, то подстановка $\lambda(t)$ из (14) в уравнение (9) приводит к равенствам

$$\begin{gathered} C_{12} = -m^2 A_{12}, \qquad C_{22} - C_{11} = -m^2(A_{22} - A_{11}), \\ ms_1 = n(C_{13} + mB_{13}), \qquad ms_2 = n(C_{23} + mB_{23}), \\ \lambda_0 = -\frac{1}{m}\Big[s_3 + mnA_{33} + \frac{n}{2}(B_{11} + B_{22})\Big]. \end{gathered} \quad (16)$$

Тогда выражение (14) упрощается

$$\lambda(t) = \frac{s_1}{n}\sin nt + \frac{s_2}{n}\cos nt + \lambda_0. \quad (17)$$

Следовательно, в случае $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$ ($\overline{\alpha} = \overline{a}$), $a_0 = 0$ условиями существования регулярных прецессий гиростата служат условия (15)–(17). Из (15) следует, что горизонтальная ось, проходящая через вектор $\overline{a}$, является главной осью в гиростате. Соотношения (15)–(17) показывают, что в классическом случае ($C_{ij} = 0$, $B_{ij} = 0$) гиростатический момент не изменяется по величине. То есть аналога построенного решения (4), (5), (17) в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести не существует.

Случай $\boldsymbol{\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 1}$. Пусть в уравнениях (7)–(9), (11) имеют место равенства $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$. Тогда из уравнения (7) вытекает равенство (14), т. е. функция $\lambda(t)$ имеет периодический характер. Поскольку соотношение (11) является первым интегралом, то вместо уравнения (8) можно рассматривать (11).

Внесем выражение (14) в уравнения (9), (11) и потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по t. Тогда, учитывая обозначения (10), (12), получим следующие условия на параметры:

$$
\begin{aligned}
&B_{12} = 2mA_{12}, \qquad B_{22} - B_{11} = 2m(A_{22} - A_{11}),\\
&C_{12} = -m^2 A_{12}, \qquad C_{22} - C_{11} = -m^2(A_{22} - A_{11}),\\
&C_{13} = -\frac{1}{a_0} m(n + a_0 m)A_{13}, \qquad C_{23} = -\frac{1}{a_0} m(n + a_0 m)A_{23},\\
&s_1 = \frac{1}{a_0}(n + a_0 m)[a_0 B_{13} - (n + 2a_0 m)A_{13}],\\
&s_2 = \frac{1}{a_0}(n + a_0 m)[a_0 B_{23} - (n + 2a_0 m)A_{23}],\\
&\lambda_0 = -\frac{1}{m}\biggl[s_3 + \frac{a_0}{2}(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) + \frac{n}{2}(B_{11} + B_{22}) +\\
&\qquad + \frac{1}{2}a_0 m(B_{11} + B_{22} - 2B_{33}) + mnA_{33} - \frac{a_0 m^2}{2}(A_{11} + A_{22} - 2A_{33})\biggr],\\
&S_0 = a_0 \lambda_0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

При условиях (18) функция (14) принимает вид

$$
\lambda(t) = \frac{1}{n}P_1 \sin nt + \frac{1}{n}P_1' \cos nt + \lambda_0, \tag{19}
$$

где

$$
P_1 = -\frac{a_0' n}{a_0}[(n + 2a_0 m)A_{13} - a_0 B_{13}], \qquad P_1' = -\frac{a_0' n}{a_0}[(n + 2a_0 m)A_{23} - a_0 B_{23}].
$$

Рассмотрим случай, когда движение гиростата происходит под действием силы тяжести. Положим в формулах (18), (19) $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$. Тогда из (18) следуют равенства

$$
A_{12} = 0, \qquad A_{22} = A_{11}, \qquad s_1 = s_2 = 0, \qquad n + a_0 m = 0. \tag{20}
$$

При этом величины A_{13} и A_{23} одновременно не обращаются в нуль. То есть с учетом равенств (20) можно утверждать, что гиростат по распределению масс не является гироскопом Лагранжа. Поскольку эллипсоид инерции в неподвижной точке описывается уравнением

$A_{11}(x^2+y^2)+2A_{13}xz+2A_{23}yz+A_{33}z^2=\text{const}$, то можно утверждать, что в полученном решении

$$\begin{aligned}
&\nu_1=a_0'\sin nt, \qquad \nu_2=a_0'\cos nt, \qquad \nu_3=a_0,\\
&\omega_1=a_0'm\sin nt, \qquad \omega_2=a_0'm\cos nt, \qquad \omega_3=0,\\
&\lambda(t)=-a_0'mA_{13}\sin nt-a_0'mA_{23}\cos nt+\frac{1}{2m}[a_0m^2(2A_{11}+A_{33})-2s_3],
\end{aligned}\tag{21}$$

условия на компоненты тензора инерции такие же, как в решении Гриоли [7]. Представляет интерес условие $n=-a_0m$, определяющее связь между скоростями собственного вращения и прецессии.

В случае (18), (19) указанные выше свойства не выполняются. В частности, в нем отсутствует условие на компоненты тензора инерции, что означает произвольное распределение масс гиростата. При этом представление условий существования прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом в виде (18) целесообразно в силу возможности анализа общности условий (18) и условий прецессионных движений гиростата с постоянным гиростатическим моментом [2, с. 48].

Отметим, что для решения (21) вектор гиростатического момента $\overline{\lambda}(t)=\lambda(t)\cdot\overline{\alpha}$ в силу равенств $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=1$ направлен по вектору $\overline{a}$ (т. е. по оси собственного вращения гиростата). Это свойство можно учесть на практике при построении управляющего момента $\overline{\lambda}(t)$.

Случай $\boldsymbol{\alpha_3=0}$, $\boldsymbol{\alpha_1=1}$. В этом случае $\overline{\alpha}\cdot\overline{a}=0$, т. е. гиростатический момент ортогонален оси собственного вращения гиростата. Из уравнений (7), (11) вытекает равенство

$$\begin{aligned}
&2n(P_2\cos 2nt-P_2'\sin 2nt-P_1\cos nt+P_1'\sin nt)\sin nt-\\
&\qquad -m(Q_2'\cos 2nt+Q_2\sin 2nt-2Q_1'\cos nt-2Q_1\sin nt+2nS_0)\cos nt=0.
\end{aligned}\tag{22}$$

Равенство (22) должно быть тождеством по t. Из этого условия вытекают соотношения

$$\begin{aligned}
&Q_2=0, \qquad P_2=0, \qquad nP_2'-\frac{m}{2}Q_2'=0, \qquad nP_2'+\frac{m}{2}Q_2'+2nmS_0=0,\\
&nP_1-mQ_1=0, \qquad P_1'=0, \qquad Q_1'=0.
\end{aligned}\tag{23}$$

Для сохранения симметрии условий существования прецессий рассмотрим случай $P_1=0$, $Q_1=0$. Тогда из (23) в силу обозначений (10) имеем

$$B_{12}=2mA_{12}, \qquad C_{22}-C_{11}=\frac{m}{2}(B_{11}-B_{22}), \qquad C_{12}=-m^2A_{12},\tag{24}$$

$$a_0B_{13}-(n+2a_0m)A_{13}=0, \qquad a_0B_{23}-(n+2a_0m)A_{23}=0,\tag{25}$$

$$s_1=a_0C_{13}-m(n+a_0m)A_{13}, \qquad s_2=a_0C_{23}-m(n+a_0m)A_{23}.\tag{26}$$

На основании условий (23) функция $\lambda(t)$ из (11) примет вид

$$\lambda(t)=-\frac{Q_2'}{a_0'n}\sin nt.\tag{27}$$

Подставим выражение (27) в уравнение (9) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по t. Тогда с учетом условий (25), (26) получим

$$\begin{gathered}
s_1 = 0, \qquad s_2 = 0, \qquad C_{13} = m^2 A_{13} - mB_{13}, \qquad C_{23} = m^2 A_{23} - mB_{23}, \\
s_3 + \frac{a_0}{2}(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) + m(n + a_0 m)A_{33} - \frac{m(2a_0 m - n)}{2}A_{22} - \\
- \frac{mn}{2}A_{11} + \frac{(3n + a_0 m)}{4}B_{11} + \frac{(3a_0 m + n)}{4}B_{22} - a_0 m B_{33} = 0.
\end{gathered} \tag{28}$$

Таким образом, условиями существования регулярных прецессий в случае $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 1$ служат равенства (24), (25), (28). Зависимость $\lambda(t)$ определяется формулой (27), в которой

$$Q'_2 = \frac{{a'_0}^2 n}{2}[B_{22} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})] \neq 0.$$

Рассмотрим случай действия на гиростат силы тяжести. Положим в соотношениях (24), (25), (28) $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1, 3})$. Тогда получим равенства $A_{13} = A_{23} = 0$ и

$$s_3 + \frac{1}{2}mA_{33}(2n + a_0 m) - a_0 m^2 A_{22} = 0. \tag{29}$$

Из (29) следует, что в общем случае $s_3 \neq 0$. Учитывая условия $s_2 = s_1 = 0$, заключаем, что вектор $\overline{s}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$, который определяет ось собственного вращения гиростата. В силу обозначений (10) величина Q'_2 из формулы (27) принимает значение: ${a'_0}^2 nm(A_{11} - A_{22})$. Поэтому при $A_{22} \neq A_{11}$ значение $\lambda(t) \neq 0$. Следовательно, в классическом случае следует предполагать $A_{22} \neq A_{11}$, что означает несуществование регулярной прецессии для симметричного гиростата с переменным моментом количества движения $\overline{\lambda}(t)$.

Таким образом, в данной работе доказано существование регулярной прецессии $\overline{\omega} = n\overline{a} + m\overline{\nu}$ $(\overline{\nu} = (a'_0 \sin nt, a'_0 \cos nt, a_0))$ в трех случаях. Для первого случая: $\overline{\alpha} \parallel \overline{a}$, $a_0 = 0$; для второго случая: $\overline{\alpha} \parallel \overline{a}$, $a_0 \neq 0$; для третьего случая: $\overline{\alpha} \perp \overline{a}$. В этих случаях функция $\lambda(t)$ является тригонометрическим многочленом первого порядка. Полученные результаты отличаются от результатов для прецессий с постоянным по величине гиростатическим моментом [2].

1. *Волкова О. С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
2. *Горр Г. В., Мазнев А. В., Щетинина Е. К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
3. *Харламов П. В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика тв. тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
4. *Волкова О. С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Там же. – 2008. – Вып. 38. – С. 80–86.
5. *Волкова О. С., Гашененко И. Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Там же. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
6. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**, No 5. – P. 742–745.

7. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura et Appl. – 1947. – **4**, No 26. – f. 3–4. – P. 271–281.

Донецкий национальный университет *Поступило в редакцию 16.11.2010*

A. V. Maznyev

Gyrostat regular precessions of with variable gyrostat moment under the influence of potential and gyroscopic forces

The conditions of the existence of gyrostat regular precessions under the influence of potential and gyroscopic forces supposing that the gyrostat moment depends on the time are obtained. Their connection with the conditions of the existence of gyrostat regular precessions under the influence of gravity is studied.