ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2011

ФІЗИКА

УДК 530.182

В. О. Вахненко

Застосування методу оберненої задачі розсіювання до рівняння Вахненка–Паркеса для опису взаємодії солітону з періодичною хвилею

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. А. Даниленком)

Описано процедуру оберненої задачі розсіювання для знаходження розв'язків рівняння Вахненка–Паркеса, які пов'язуються як з дискретною, так і з неперервною частиною спектральних даних у асоційованій спектральній задачі. Вивчається взаємодія солітону та періодичної хвилі.

Опис багатьох фізичних явищ пов'язується з потребою пошуку точних розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь. Для побудови точних розв'язків повністю інтегровних рівнянь зараз розвинені різні ефективні підходи. Одним із фундаментальних та більш узагальнених методів по праву вважається метод оберненої задачі розсіювання, хоча його застосування має певні труднощі [1–3].

У даній роботі розглядається нелінійне еволюційне рівняння

$$W_{XXT} + (1 + W_T)W_X = 0, \tag{1}$$

яке виникло з рівняння Вахненка [4–6]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u + u = 0 \tag{2}$$

після перетворення

$$u(x,t) := U(X,T) = W_X(X,T), \qquad x := x_0 + T + W(X,T), \qquad t := X. \tag{3}$$

Докладно з цим перетворенням (3) можна ознайомитися в [7, 8]. Вже традиційно рівняння (1) цитується як рівняння Вахненка–Паркеса (рВП) [9–11].

Метод оберненої задачі розсіювання виявився найбільш прийнятним для розв'язування задач з початковими умовами. Раніше цей метод ми застосували, щоб одержати точні

N-солітонні розв'язки для рВП [12]. В цій роботі нами використовується метод оберненої задачі розсіювання для вивчення розв'язків рВП, які пов'язуються як з дискретним, так і з неперервним спектром асоційованої спектральної задачі.

Спектральна задача для рВП. Метод оберненої задачі розсіювання пов'язується з асоційованою спектральною задачею на власні значення. В [12] показано, що пара рівнянь

$$\psi_{XXX} + U\psi_X - \lambda\psi = 0, \tag{4}$$

$$3\psi_{XT} + (W_T + 1)\psi = 0 \tag{5}$$

відноситься до рВП (1), причому спектральне рівняння (4) — рівняння третього порядку. Для спектрального рівняння третього порядку обернену задачу розвинули Каудрей [13] і Кауп [14]. Результати цих авторів стали підгрунтям для знаходження розв'язків рВП з застосуванням методу оберненої задачі розсіювання [12].

Дотримуючись загальної теорії оберненої задачі розсіювання для N спектральних рівнянь, яка започаткована Каудреєм у роботі [13], спектральне рівняння (4) переписуємо у вигляді [12]

$$\frac{\partial}{\partial X}\boldsymbol{\psi} = [\mathbf{A}(\zeta) + \mathbf{B}(X,\zeta)] \cdot \boldsymbol{\psi}. \tag{6}$$

Тут

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_X \\ \psi_{XX} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W_X & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Матриця $\mathbf{A}$ має власні значення $\lambda_j(\zeta)$ та ліві і праві власні вектори $\widetilde{\boldsymbol{v}}_j(\zeta)$, $\boldsymbol{v}_j(\zeta)$, відповідно. Для випадку, що розглядається, маємо

$$\lambda_j(\zeta) = \omega_j\zeta, \qquad \lambda_j^3(\zeta) = \lambda, \qquad \boldsymbol{v}_j(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \\ \lambda_j^2 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{v}}_j(\zeta) = \begin{pmatrix} \lambda_j^2 & \lambda_j & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

тут $\omega_j = e^{2\pi \mathrm{i}(j-1)/3}$ — кубічні корені з 1.

Розв'язок лінійного рівняння (4), або, еквівалентно, системи рівнянь (6), був отриманий Каудреєм у [13] через функції Йоста $\boldsymbol{\phi}_j(X,\zeta)$, які мають таку асимптотичну поведінку:

$$\boldsymbol{\Phi}_j(X,\zeta) \colon = \exp\{-\lambda_j(\zeta)X\}\boldsymbol{\phi}_j(X,\zeta) \to \boldsymbol{v}_j(\zeta), \qquad \text{коли} \qquad X \to -\infty. \tag{9}$$

Змінна T поки що вважається параметром. Пізніше буде врахована T еволюція спектральних даних. Розв'язок прямої задачі задається системою рівнянь (4.5) з [13]. Оскільки для функцій Йоста спостерігається низка симетрій, таких як (6.14) і (6.15) з [13], які справедливі також і у нашому випадку, то досить розглядати тільки елемент $\phi_1(X,\zeta)$ (або $\Phi_1(X,\zeta)$). У загальному випадку необхідно враховувати як дискретний спектр, так і неперервний. У відповідності з співвідношенням (6.20) з [13] розв'язок рівняння (6) подається у вигляді

$$\Phi_1(X,\zeta) = 1 - \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=2}^{3}\gamma_{1j}^{(k)}\frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta_1^{(k)})]X\}}{\lambda_1(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta)}\Phi_1(X,\omega_j\zeta_1^{(k)}) + \\ + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\sum_{j=2}^{3}Q_{1j}(\zeta')\frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta') - \lambda_1(\zeta')]X\}}{\zeta' - \zeta}\Phi_1^{\pm}(X,\omega_j\zeta')\,d\zeta'. \tag{10}$$

Рівняння (10) утримує спектральні дані, а саме, K полюсів і величин $\gamma_{1j}^{(k)}$ для дискретного спектра, а також для неперервного спектра функції $Q_{1j}(\zeta')$ на всіх межах інтегрування, де $\mathrm{Re}(\lambda_1 - \lambda_j) = 0$ при $j \neq 1$.

Дискретний спектр відповідає солітонним розв'язкам. Раніше в роботі [12] знайдено N-солітонні розв'язки для рВП за допомогою оберненої задачі розсіювання. Нижче вивчаються розв'язки для рВП з урахуванням додатково неперервної частини спектральних даних.

Солітонні та періодичні розв'язки. Додатково до відомої процедури пошуку солітонних розв'язків із дискретного спектра проаналізуємо неперервний спектр асоційованої задачі на власні значення. Врахуємо сингулярність на межах, які визначаються умовою $\mathrm{Re}(\lambda_1 - \lambda_j) = 0$ при всіх $j \neq 1$. Для Q_{1j} межі пролягають по двох лініях

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \zeta' = \omega_2\xi, \qquad \text{тут} \quad Q_{12}^{(1)}(\zeta') \neq 0, \qquad Q_{13}^{(1)}(\zeta') \equiv 0,\\
&\text{(ii)} \quad \zeta' = -\omega_3\xi, \qquad \text{тут} \quad Q_{12}^{(2)}(\zeta') \equiv 0, \qquad Q_{13}^{(2)}(\zeta') \neq 0
\end{aligned} \tag{11}$$

з дійсною змінною ξ.

Розглянемо функції сингулярності $Q_{1j}(\zeta')$ у вигляді

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
Q_{12}^{(1)}(\zeta') &= -2\pi \mathrm{i} q_{12}^{(1)}\delta(\zeta' - \zeta_1')\\
Q_{13}^{(1)}(\zeta') &= -2\pi \mathrm{i} q_{13}^{(1)}\delta(\zeta' - \zeta_1') \equiv 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{на лінії} \quad \zeta' = \omega_2\xi,\\
&\left.\begin{aligned}
Q_{12}^{(2)}(\zeta') &= -2\pi \mathrm{i} q_{12}^{(2)}\delta(\zeta' - \zeta_2') \equiv 0\\
Q_{13}^{(2)}(\zeta') &= -2\pi \mathrm{i} q_{13}^{(2)}\delta(\zeta' - \zeta_2')
\end{aligned}\right\} \quad \text{на лінії} \quad \zeta' = -\omega_3\xi.
\end{aligned} \tag{12}$$

Аналіз показує, що інтегрування у (10) потрібно виконувати так, щоб змінна ξ пробігала від $-\infty$ до $+\infty$. Комбінація функції сингулярності у вигляді (12) та однієї пари полюсів (один солітон) веде до спрощення співвідношення (10)

$$\begin{aligned}
\Phi_1(X,\zeta) = 1 - \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{3}\gamma_{1j}^{(k)}\frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta_1^{(k)})]X\}}{\lambda_1(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta)}\Phi_1(X,\omega_j\zeta_1^{(k)}) -\\
- \sum_{m=1}^{2}\sum_{j=2}^{3} q_{1j}^{(m)}\frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_m') - \lambda_1(\zeta_m')]X\}}{\zeta_m' - \zeta}\Phi_1(X,\omega_j\zeta_m').
\end{aligned} \tag{13}$$

У роботі [12] доведено, що полюси з'являються тільки попарно $\zeta_1^{(1)} = \mathrm{i}\omega_2\xi_1$, $\zeta_1^{(2)} = -\mathrm{i}\omega_3\xi_1$, причому $\gamma_{12}^{(1)} = \omega_2\beta_1$, $\gamma_{13}^{(1)} = 0$, $\gamma_{12}^{(2)} = 0$, $\gamma_{13}^{(2)} = \omega_3\beta_1$. Константа β_1 в загальному випадку — комплексна величина.

Як випливає із співвідношень (13) і (5.8) з [12]

$$\phi_{1X}(X,\zeta) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}[\phi_{1X}(X,-\omega_2\zeta)\phi_1(X,-\omega_3\zeta) - \phi_{1X}(X,-\omega_3\zeta)\phi_1(X,-\omega_2\zeta)], \tag{14}$$

сингулярності у вигляді (12) повинні з'являтися також попарно $\zeta_1' = \omega_2\xi_2$, $\zeta_2' = -\omega_3\xi_2$. Розглядаючи граничний перехід $\zeta \to \zeta_m'$ та $X \to -\infty$, з (14) для спектральних даних неперервної частини спектра безпосередньо випливає $q_{12}^{(1)}\omega_2 = q_{13}^{(2)}$.

Підставляючи в (13) чотири рази послідовно значення за значенням $\zeta = \omega_2\zeta_1^{(1)}$, $\zeta = \omega_3\zeta_1^{(2)}$, $\zeta = \omega_2\zeta_1'$, $\zeta = \omega_3\zeta_2'$, приходимо до системи чотирьох лінійних рівнянь відносно невідомих $\Phi_1(X, \omega_2\zeta_1^{(1)})$, $\Phi_1(X, \omega_3\zeta_1^{(2)})$, $\Phi_1(X, \omega_2\zeta_1')$, $\Phi_1(X, \omega_3\zeta_2')$.

Зручно ввести позначення

$$\mu_{jk} = \begin{cases} \lambda_j(\zeta_1^{(k)}), & \text{якщо} \quad k = 1, 2, \\ \lambda_j(\zeta'_{(k-2)}), & \text{якщо} \quad k = 3, 4, \end{cases} \qquad p_{1j}^{(k)} = \begin{cases} \gamma_{1j}^{(k)}, & \text{якщо} \quad k = 1, 2, \\ q_{1j}^{(k-2)}, & \text{якщо} \quad k = 3, 4, \end{cases} \tag{15}$$

тоді (13) переписується як

$$\Phi_1(X, \zeta) = 1 - \sum_{k=1}^{4}\sum_{j=2}^{3} p_{1j}^{(k)} \frac{\exp[(\mu_{jk} - \mu_{1k})X]}{\mu_{1k} - \zeta} \Phi_1(X, \mu_{jk}). \tag{16}$$

Перевага віддається іншим невідомим, а саме $\Psi_k(X)$, які є комбінацією попередніх та вводяться за визначенням

$$\Psi_k(X) = \sum_{j=2}^{3} p_{1j}^{(k)} \exp(\mu_{jk}X)\Phi_1(X, \mu_{jk}). \tag{17}$$

Співвідношення (16) набуває вигляду

$$\Phi_1(X, \zeta) = 1 - \sum_{k=1}^{4} \frac{\exp(-\mu_{jk}X)}{\mu_{1k} - \zeta} \Psi_k(X). \tag{18}$$

Розвиваючи $\Phi_1(X, \zeta)$ в асимптотичний ряд за $\lambda_1^{-1}(\zeta)$, можна одержати (див. (5.11) в [12])

$$\Phi_1(X, \zeta) = 1 - \frac{1}{3\lambda_1(\zeta)}[W(X) - W(-\infty)] + O(\lambda_1^{-2}(\zeta)), \tag{19}$$

що разом з (18) дозволяє прийти до одного з головних співвідношень (див. також (6.38) в [13])

$$W(X) - W(-\infty) = -3\sum_{k=1}^{4} \exp(-\mu_{jk}X)\Psi_k(X) = 3\frac{\partial}{\partial X}\ln(\det M). \tag{20}$$

Матриця M визначається таким чином:

$$M_{kl}(X) = \delta_{kl} - \sum_{j=2}^{3} p_{1j}^{(k)} \frac{\exp[(\mu_{jk} - \mu_{1l})X]}{\mu_{jk} - \mu_{1l}}. \tag{21}$$

Розглянемо T-еволюцію спектральних даних. Аналізуючи розв'язок рівняння (5) при $X \to -\infty$, знаходимо, що $\phi_i(X, T, \zeta) = \exp[-(3\lambda_i(\zeta))^{-1}T]\phi_i(X, 0, \zeta)$. Отже, T-еволюція спектральних даних задається співвідношеннями (для $k = 1, \ldots, 4$)

$$\lambda_j(T) = \lambda_j(0), \qquad p_{1j}^{(k)}(T) = p_{1j}^{(k)}(0)\exp\{[-(3\mu_{jk})^{-1} + (3\mu_{1k})^{-1}]T\}. \tag{22}$$

Остаточний результат для розв'язку рВП, який випливає з неперервної частини спектральних даних для сингулярності (12) та з дискретної частини спектральних даних у вигляді тільки пари полюсів і в якому враховано T-еволюцію, набуває вигляду

$$W(X,T) = 3\frac{\partial}{\partial X}\ln(\det M(X,T)), \tag{23}$$

де M — матриця 4×4 з елементами

$$M_{kl}(X) = \delta_{kl} - \sum_{j=2}^{3} p_{1j}^{(k)} \frac{\exp\{(\mu_{jk}-\mu_{1l})X + [-(3\mu_{jk})^{-1} + (3\mu_{1k})^{-1}]T\}}{\mu_{jk}-\mu_{1l}}, \tag{24}$$

причому

$$\begin{array}{llll}
\mu_{11}=\lambda_1(\zeta_1^{(1)})=i\omega_2\xi_1, & \mu_{21}=\lambda_2(\zeta_1^{(1)})=i\omega_3\xi_1, & p_{12}^{(1)}=\gamma_{12}^{(1)}=\omega_2\beta_1, & p_{13}^{(1)}=\gamma_{13}^{(1)}=0,\\
\mu_{12}=\lambda_1(\zeta_1^{(2)})=-i\omega_3\xi_1, & \mu_{32}=\lambda_3(\zeta_1^{(2)})=-i\omega_2\xi_1, & p_{12}^{(2)}=\gamma_{12}^{(2)}=0, & p_{13}^{(2)}=\gamma_{13}^{(2)}=\omega_3\beta_1,\\
\mu_{13}=\lambda_1(\zeta_1')=\omega_2\xi_2, & \mu_{23}=\lambda_2(\zeta_1')=\omega_3\xi_2, & p_{12}^{(3)}=q_{12}^{(1)}=\omega_2\beta_2, & p_{13}^{(3)}=q_{13}^{(1)}=0,\\
\mu_{14}=\lambda_1(\zeta_2')=-\omega_3\xi_2, & \mu_{34}=\lambda_3(\zeta_2')=-\omega_2\xi_2, & p_{12}^{(4)}=q_{12}^{(2)}=0, & p_{13}^{(4)}=q_{13}^{(2)}=\omega_3\beta_2.
\end{array}$$

Розв'язок (23), (24) утримує по дві довільні сталі ξ_i і β_i, ($i = 1, 2$). Сталі ξ_i — дійсні величини, в той час як сталі β_i у загальному можуть набувати комплексного значення.

Якщо обмежитися тільки неперервним спектром ($\gamma_{1j}^{(k)} \equiv 0$), то розв'язок (23), (24) утримує одну частоту із неперервного спектра. Власне, сингулярність у вигляді (12) відповідальна за цю частоту. З цієї причини розв'язок (23), (24) при $\gamma_{1j}^{(k)} = 0$ будемо називати одномодовим розв'язком для рВП.

Розв'язки, знайдені описаним методом з використанням матриці (24), у загальному випадку — комплексні функції. Оскільки ми цікавимося дійсними розв'язками, необхідно накласти обмеження на довільність вибору сталих β_i.

Приклади дійсних розв'язків. Розглянемо два випадки, в яких вдалося звести комплексні розв'язки до дійсних. Власне, це є кульмінацією в пошуку розв'язків рВП. Перший випадок враховує тільки неперервний спектр ($\gamma_{1j}^{(k)} = 0$, $q_{1j}^{(k)} \neq 0$), у другому досліджується взаємодія солітону та періодичної хвилі.

1. Для знаходження одномодового розв'язку нам потрібно, в першу чергу, підрахувати значення детермінанта матриці M (24) розміром 2×2 при $N = 1$. Знаходимо, що для матриці

$$\begin{pmatrix}
1 - \dfrac{\mathrm{i}\omega_2\beta_2}{\sqrt{3}\xi_2}\exp[-\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2 X + (\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2)^{-1}T] & -\dfrac{\omega_3\beta_2}{2\xi_2}\exp[2\omega_3\xi_2 X + (\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2)^{-1}T]\\
\dfrac{\omega_2\beta_2}{2\xi_2}\exp[-2\omega_2\xi_2 X + (\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2)^{-1}T] & 1 - \dfrac{\mathrm{i}\omega_3\beta_2}{\sqrt{3}\xi_2}\exp[-\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2 X + (\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2)^{-1}T]
\end{pmatrix} \tag{25}$$

її детермінант задається таким співвідношенням:

$$\det M = [1 + c_2\exp(-\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2 X + (\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2)^{-1}T)]^2, \qquad c_2 = \frac{\mathrm{i}\beta_2}{2\sqrt{3}\xi_2}. \tag{26}$$

Індекси при ξ_2 та β_2 записані у відповідності з (24). Отже, як відзначалося раніше, сингулярність у вигляді (12) відповідальна за одну частоту з неперервного спектра.

Умова, що забезпечує дійсні значення W, вимагає обмеження на сталу β_2 (якщо стала ξ_2 довільна). Нам вдалося визначити такі обмеження, а саме, стала $c_2 = |c_2|\exp(\mathrm{i}\chi_2)$, яка в загальному випадку може бути комплексною величиною, повинна мати $|c_2| = 1$, в той час як довільна дійсна стала χ_2 визначає початковий зсув розв'язку X_0, і тоді

$$\det M = \left[1 + \exp\left(-\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2(X - X_0) + \frac{T}{\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2}\right)\right]^2. \tag{27}$$

Остаточним результатом для однієї моди з неперервного спектра є розв'язок (23) з (27), а саме:

$$W(X,T) = -3\sqrt{3}\xi_2 \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_2(X - X_0) + \frac{T}{2\sqrt{3}\xi_2}\right) + \mathrm{const}. \tag{28}$$

Такий самий розв'язок було отримано раніше іншими прямими методами, наприклад, (G'/G)-розширеним методом [11]. Проте тільки запис розв'язку у вигляді (23), (24) дозволяє нам вивчити взаємодію двох розв'язків, у даному випадку — солітону з періодичною хвилею.

2. Розглянемо розв'язок для рВП з урахуванням одного солітону та однієї моди з неперервного спектра. У такому випадку M є матриця $4{\times}4$. Не записуючи тут явний вигляд матриці, подаємо значення детермінанта

$$\det M = (1 + c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_1 c_2 b_{12} q_1 q_2)^2, \tag{29}$$

де

$$\begin{aligned} &q_1 = \exp[\sqrt{3}\xi_i X - (\sqrt{3}\xi_i)^{-1}T], \qquad q_2 = \exp[-\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_i X + (\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_i)^{-1}T],\\ &c_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{3}\xi_1}, \qquad c_2 = \frac{\mathrm{i}\beta_2}{2\sqrt{3}\xi_2}, \qquad b_{12} = \left(\frac{\xi_1 + \mathrm{i}\xi_2}{\xi_1 - \mathrm{i}\xi_2}\right)^2 \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2 + \mathrm{i}\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \mathrm{i}\xi_1\xi_2}. \end{aligned} \tag{30}$$

Обмежуючись дійсними значеннями W при довільних, але дійсних сталих ξ_i, потрібно знайти умови для сталих $c_i = |c_i|\exp(\mathrm{i}\chi_i)$. Докладний аналіз показав, що умови $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{b_{12}}$ є достатніми, щоб величина W набувала дійсних значень. Таким чином, взаємодія солітону та періодичної хвилі для рВП описується співвідношенням (23) з

$$\det M = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{b_{12}}}q_1 + \frac{1}{\sqrt{b_{12}}}q_2 + q_1 q_2\right)^2,$$

а q_1, q_2 та b_{12} — як в (30).

Таким чином, метод оберненої задачі розсіювання був застосований для вивчення взаємодії солітонних та періодичних розв'язків для рівняння Вахненка–Паркеса. Періодичні розв'язки асоціюються з неперервною частиною спектральних даних. Знайдено дійсні розв'язки для взаємодії одного солітону та одномодової хвилі.

Автор вдячний доктору Е. Дж. Паркесу за плідне обговорення і професору В. А. Даниленку за постійну підтримку.

1. *Ablowitz M. J., Segur H.* Solitons and inverse scattering transform. – Philadelphia: SIAM, 1981. – 400 p.
2. *Solitons* / Ed. by R. K. Bullough, P. J. Caudrey. – New York: Springer, 1980. – 408 p.
3. *Захаров В. Е., Манаков С. И., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. – Москва: Наука, 1980. – 320 с.

4. *Vakhnenko V. A.* Solitons in a nonlinear model medium // J. Phys. A: Math. Gen. – 1992. – **25**. – P. 4181–4187.
5. *Parkes E. J.* The stability of solutions of Vakhnenko's equation // Ibid. – 1993. – **26**. – P. 6469–6475.
6. *Vakhnenko V. O.* High frequency soliton-like waves in a relaxing medium // J. Math. Phys. – 1999. – **40**, No 3. – P. 2011. – 2020.
7. *Vakhnenko V. O., Parkes E. J.* The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation // Nonlinearity. – 1998. – **11**. – P. 1457–1464.
8. *Morrison A. J., Parkes E. J., Vakhnenko V. O.* The N loop soliton solution of the Vakhnenko equation // Ibid. – 1999. – **12**. – P. 1427–1437.
9. *Gandarias M. L., Bruzón M. S.* Symmetry relations and exact solutions for the Vakhnenko equation // Proc. of XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicacions, XI Congreso de Matimática Aplicada. – Ciudad Real, 21–25 sept. 2009. – P. 1–6.
10. *Estévez P. G.* Reciprocal transformations for a spectral problem in 2+1 dimensions // Theor. Math. Physics. – 2009. – **159**, No 3. – P. 763–769.
11. *Abazari R.* Application of (G'/G)-expansion method to travelling wave solutions of three nonlinear evolution equations // Computers and Fluids. – 2010. – **39**. – P. 1957. – 1963.
12. *Vakhnenko V. O., Parkes E. J.* The calculation of multi-soliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method // Chaos, Solitons and Fractals. – 2002. – **13**, No 9. – P. 1819–1826.
13. *Caudrey P. J.* The inverse problem for a general $N \times N$ spectral equation // Physica D. – 1982. – **6**. – P. 51–66.
14. *Kaup D. J.* On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$ // Stud. Appl. Math. – 1980. – **62**. – P. 189–216.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 07.02.2011

V. O. Vakhnenko

Applying the inverse scattering transform method to the Vakhnenko–Parkes equation to describe the interaction of a soliton and a periodic wave

We describe a procedure for using the inverse scattering transform problem to find the solutions of the Vakhnenko–Parkes equation that are associated both with discrete and continuous spectra for the spectral problem. The interaction of a soliton and a periodic wave is studied.